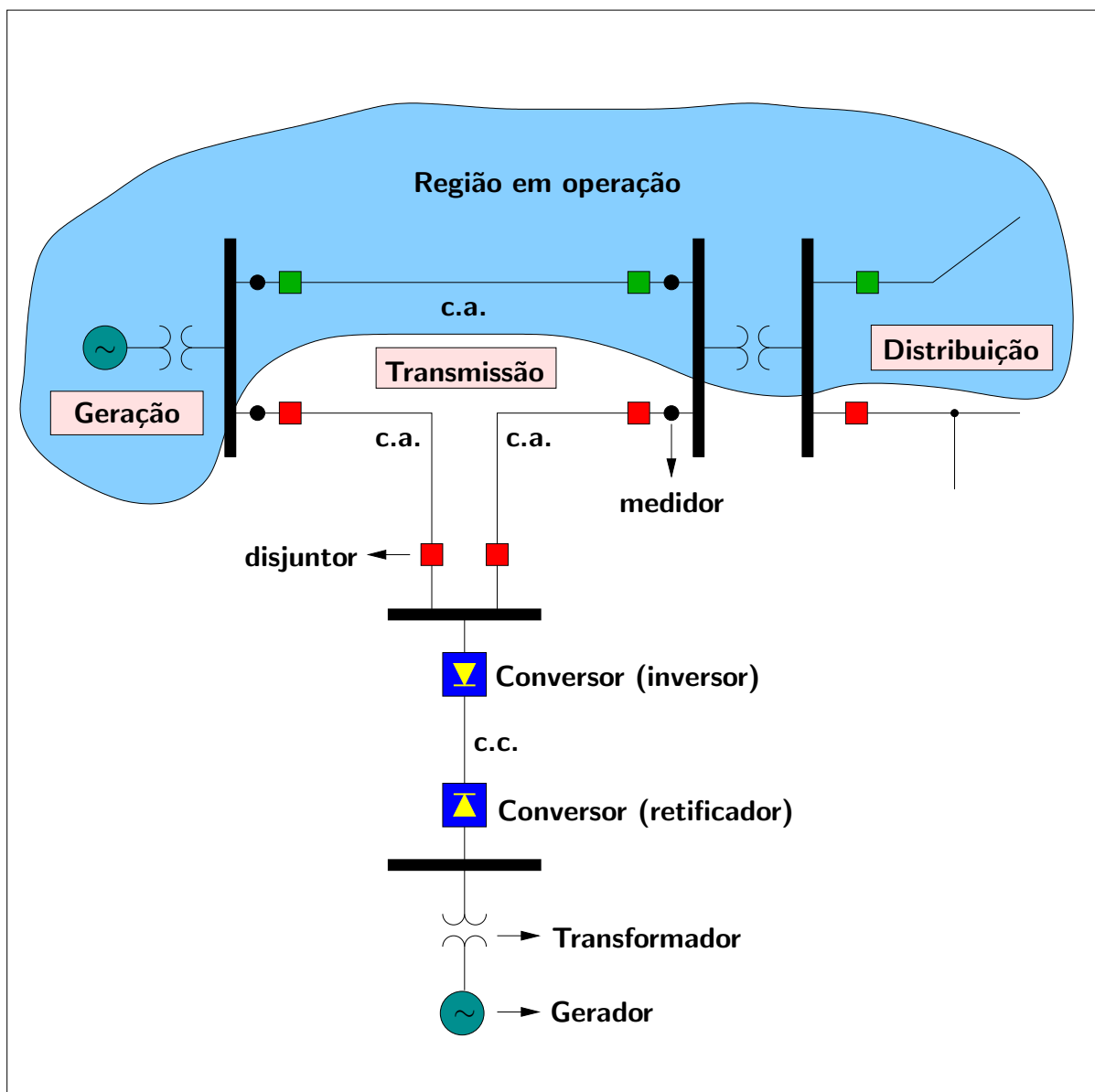

Capítulo 2

Formulação básica do problema de fluxo de carga

2.1 Motivação e idéias gerais

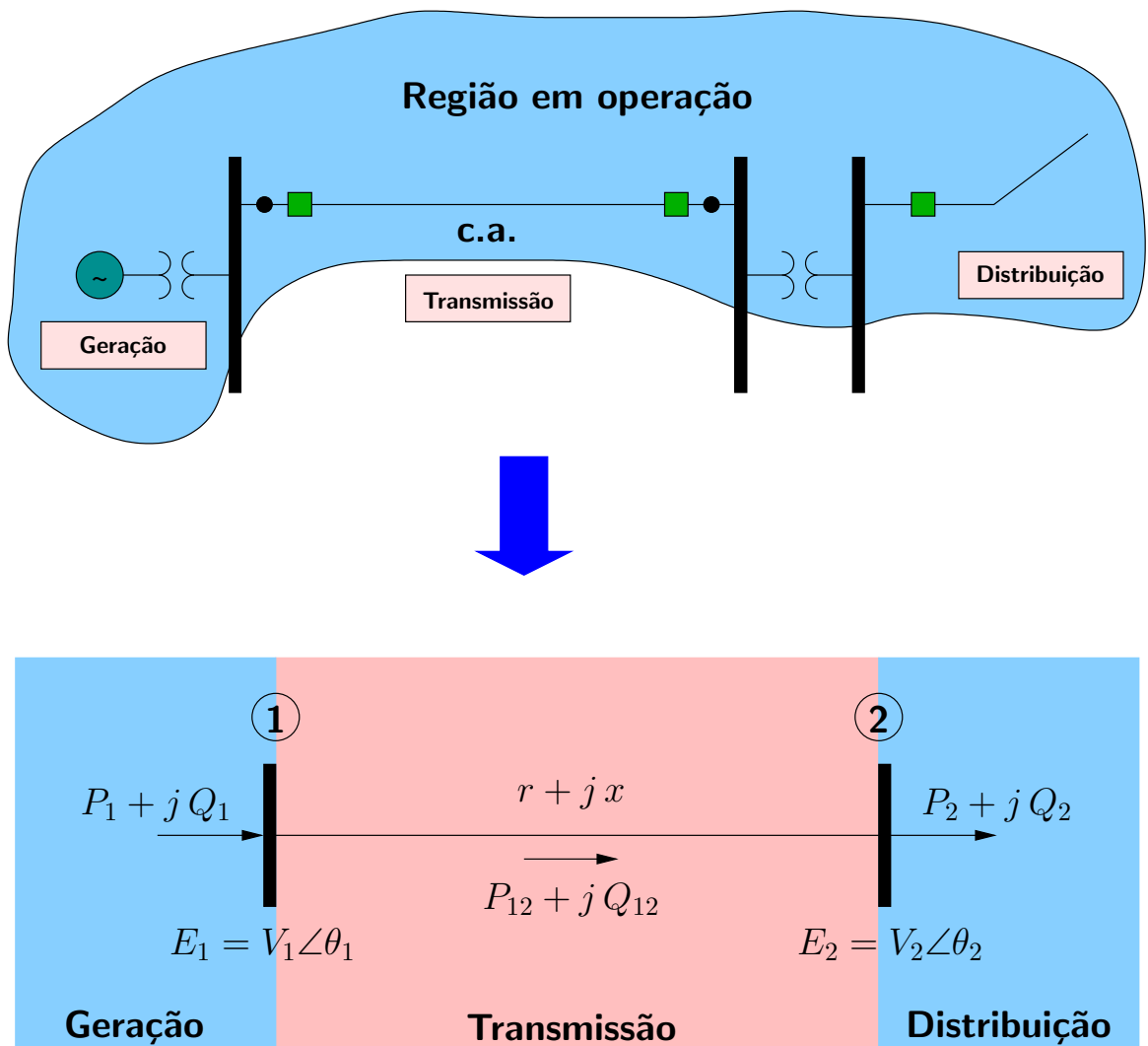
► Considere o seguinte sistema de potência:



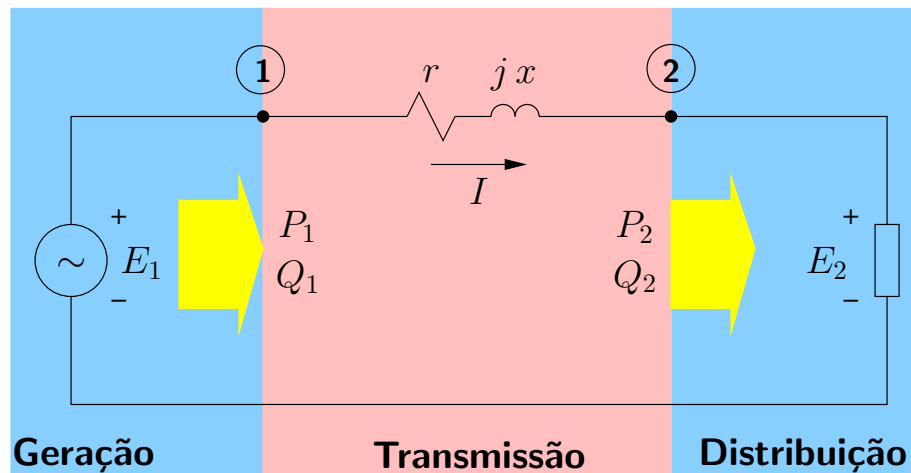
► Considere que:

- a função do sistema de geração é produzir a energia elétrica que será consumida → modelado como uma injeção de potência no barramento
- a linha de transmissão é modelada como um circuito RL série
- o sistema de distribuição consome a energia transportada pelo sistema de transmissão → modelado como uma injeção de potência no barramento

► Diagrama unifilar correspondente:



► **Circuito por fase:**



- **Dados:** $S_2 = P_2 + j Q_2 = 100 + j 0 = 100 \angle 0^\circ$ **MVA** (100 MW, 0 Mvar)
 $V_2 = 500$ **kV** (linha)
 $r = 25 \Omega/\text{fase}$
 $x = 125 \Omega/\text{fase}$

- **Pede-se:** V_1
 $S_1 = P_1 + j Q_1$

Conhecendo essas grandezas, pode-se dizer que o estado de operação da rede é totalmente conhecido. A partir daí outras análises podem ser realizadas.

- Os cálculos serão feitos em pu (por unidade), cuja idéia é muito importante no caso de circuitos com vários níveis de tensão.

- **Valores de base:**

$$S_b = 100 \text{ MVA} \quad V_b = 500 \text{ kV}$$

Conversão dos dados para pu:

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 \angle 0^\circ \text{ pu} \\ E_2 &= 1 \angle 0^\circ \text{ pu} && \text{(referência angular)} \\ r &= \frac{25}{(V_b^2/S_b)} = 0,01 \text{ pu} \\ x &= \frac{125}{(V_b^2/S_b)} = 0,05 \text{ pu} \end{aligned}$$

Corrente pelo circuito:

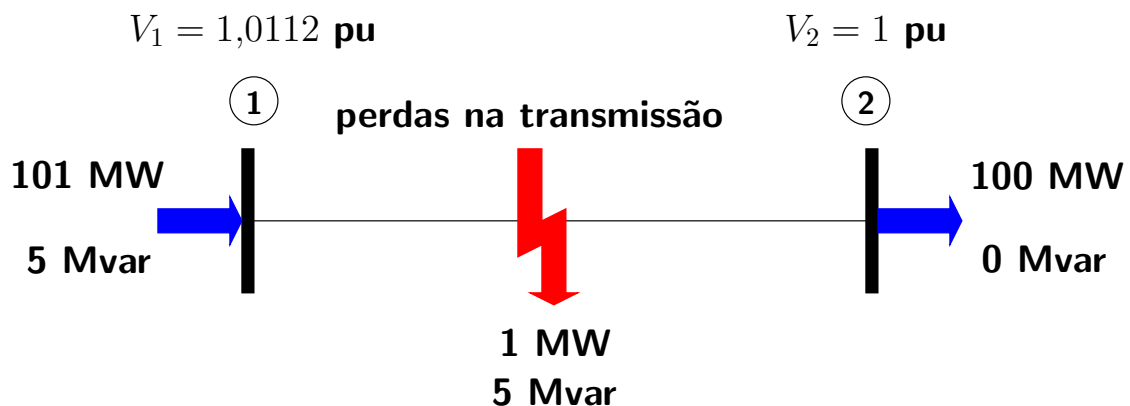
$$I = \left(\frac{S_2}{E_2} \right)^* = \left(\frac{1 \angle 0^\circ}{1 \angle 0^\circ} \right)^* = 1 \angle 0^\circ \text{ pu}$$

Tensão na fonte:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 + I(r + jx) \\ &= 1 \angle 0^\circ + 1 \angle 0^\circ (0,01 + j0,05) = 1,0112 \angle 2,8^\circ \text{ pu} \end{aligned}$$

Potência fornecida pela fonte:

$$S_1 = E_1 I^* = 1,0112 \angle 2,8^\circ = 1,01 + j0,05 \text{ pu} \quad \text{(101 MW, 5 Mvar)}$$



▶ Na prática, os dados e incógnitas não são os especificados anteriormente.

▶ Dados: $S_2 = P_2 + j Q_2 = 100 + j 0 = 100 \angle 0^\circ$ MVA (100 MW, 0 Mvar)
 $V_1 = 1,0112$ pu (*) (linha)
 $r = 25 \Omega/\text{fase}$
 $x = 125 \Omega/\text{fase}$

(*) Tensão na saída do transformador elevador na subestação da usina, mantida constante através de um complexo sistema de controle.

▶ Pedir-se: V_2
 $S_1 = P_1 + j Q_1$

▶ A resolução analítica é mais complicada. Pode-se também resolver por tentativa e erro.

▶ Resolução analítica

Lei das tensões de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 + ZI \\ &= E_2 + Z(S_2/E_2)^* \quad (\times E_2^*) \\ E_1 E_2^* &= V_2^2 + Z S_2^* \end{aligned}$$

Considerando $E_1 = V_1 \angle 0^\circ$ e $E_2 = V_2 \angle \theta_2$:

$$V_1 V_2 \angle -\theta_2 = V_2^2 + (r + j x)(P_2 - j Q_2)$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} V_1 V_2 \cos \theta_2 &= V_2^2 + (r P_2 + x Q_2) \\ V_1 V_2 \sin \theta_2 &= (r Q_2 - x P_2) \end{aligned}$$

Elevando as duas equações ao quadrado e somando-as, elimina-se θ_2 :

$$V_1^2 V_2^2 = V_2^4 + (rP_2 + xQ_2)^2 + 2V_2^2 (rP_2 + xQ_2) + (rQ_2 - xP_2)^2$$
$$V_2^4 + V_2^2 [2(rP_2 + xQ_2) - V_1^2] + [(rQ_2 - xP_2)^2 + (rP_2 + xQ_2)^2] = 0$$

que pode ser reescrita como:

$$V_2^4 + bV_2^2 + c = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta = b^2 - 4c$$
$$y_1 = (-b + \Delta^{1/2}) / 2$$
$$y_2 = (-b - \Delta^{1/2}) / 2$$
$$V_2 = \{ \pm y_1^{1/2}, \pm y_2^{1/2} \}$$

Para os dados fornecidos: $V_2 = \{\pm 1, \pm 0,05\}$ pu.

A resposta esperada é $V_2 = 1$ pu. Então:

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1} [(rQ_2 - xP_2) / V_1 V_2] = -2,8^\circ$$

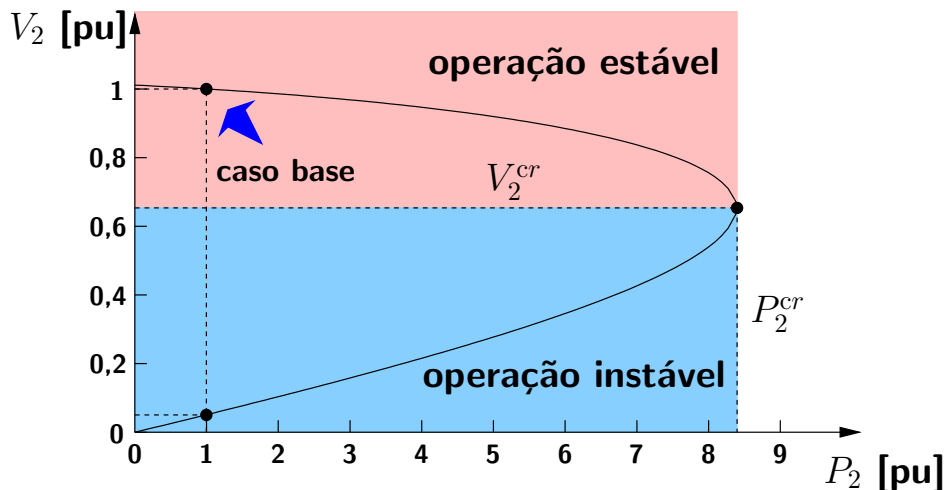
$$I = \left(\frac{S_2}{E_2} \right)^* = 1 \angle -2,8^\circ \text{ pu}$$

$$S_1 = E_1 I^* = 1,0112 \angle 2,8^\circ = 1,01 + j 0,05 \text{ pu} \quad \textbf{(101 MW, 5 Mvar)}$$

→ Mesma solução anterior.

► Interpretação:

- As duas soluções negativas não têm significado físico → são desprezadas.
- Suponha que a potência ativa da carga no barramento 2 seja variável e que a potência reativa seja nula:

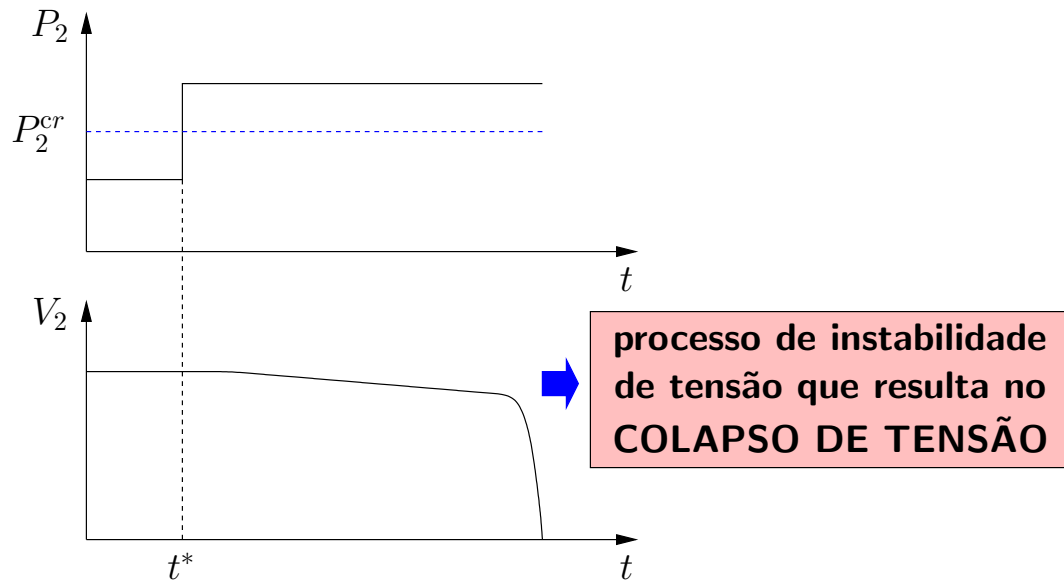


P_2^{cr} – máximo carregamento da rede para as condições especificadas.

V_2^{cr} – tensão para a qual ocorre o máximo carregamento.

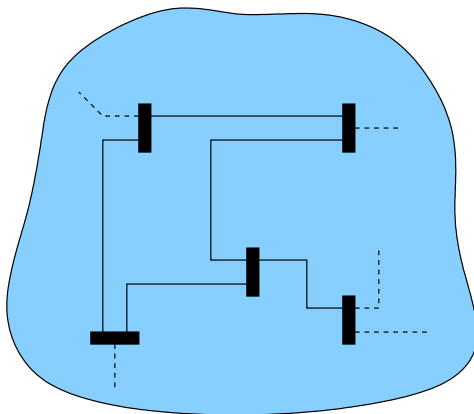
- Exercício**
- (1) Apresente a curva $[V_2 \times P_2]$ completa para o circuito exemplo, considerando $Q_2 = 0$.
 - (2) Obtenha P_2^{cr} e V_2^{cr} analiticamente e compare com os valores obtidos através da análise da curva PV.
 - (3) Apresente a curva $[V_2 \times Q_2]$ considerando $P_2 = 0$ no mesmo gráfico de (1). Obter Q_2^{cr} e V_2^{cr} analiticamente e compare com os valores obtidos através da análise da curva PV.

- ▶ Os sistemas elétricos de potência são dinâmicos:



→ Modelagem dos aspectos dinâmicos e métodos de resolução específicos são necessários.

- ▶ Para redes maiores:



- ~> Resolução por meios analíticos é impossível.
- ~> Tentativa e erro?

► Resolução por tentativa e erro

Uma idéia de um procedimento de cálculo iterativo:

- (a) Inicializar contador de iterações $\nu = 0$
- (b) Escolher $E_2^\nu = E_2^0$
- (c) Calcular a corrente pela carga:

$$I_2^\nu = \left(\frac{S_2}{E_2^\nu} \right)^*$$

- (d) Calcular a queda de tensão na linha de transmissão:

$$\Delta E^\nu = (r + jx) I_2^\nu$$

- (e) Calcular a tensão na barra de carga:

$$E_2^{\nu+1} = E_1 - \Delta E^\nu = E_1 - (r + jx) \left(\frac{S_2}{E_2^\nu} \right)^*$$

- (f) Incrementar contador de iterações ($\nu \leftarrow \nu + 1$) e voltar para o passo (c)

Começando com $E_2 = 1 \angle 0^\circ$ pu tem-se:

Iteração	E_2 [pu]
0	$1 + j0$
1	$1,0012 - j0,0500$
2	$0,9987 - j0,0493$
3	$0,9987 - j0,0494$
4	$0,9987 - j0,0494$

\rightsquigarrow **Solução:** $E_2 = 1 \angle -2,8^\circ$ pu

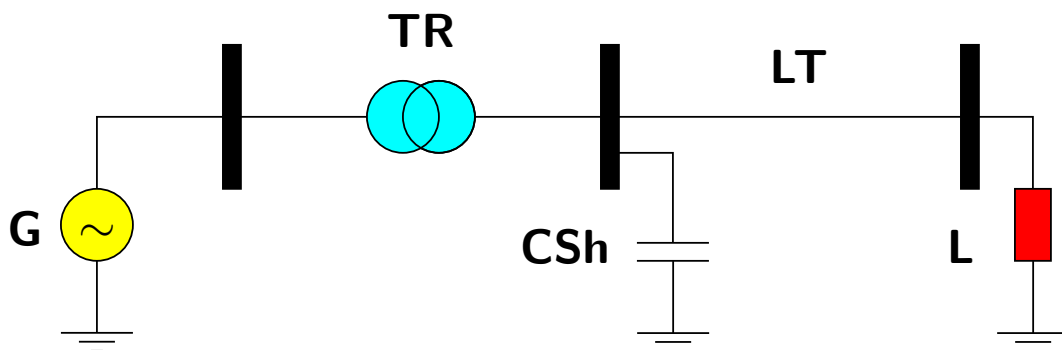
Na realidade este método iterativo (Gauss) foi o primeiro a ser proposto para a resolução das equações de fluxo de carga (~ 1956).

► **Resumo:**

- É necessário o desenvolvimento de técnicas de resolução específicas e eficientes para o problema da determinação do estado de operação de redes elétricas em regime permanente \rightsquigarrow **CÁLCULO DE FLUXO DE CARGA**
- Fluxo de carga (load flow) = Fluxo de potência (power flow)
- É uma ferramenta básica para a análise de redes elétricas

2.2 Componentes das redes elétricas

Geradores (G) Cargas (L) Reatores shunt (RSh) Capacitores shunt (CSh)	ligados entre um nó (barra) qualquer e o nó (barra) terra
Linhas de transmissão (LT) Transformadores (TR)	ligados entre dois nós (barras) quaisquer

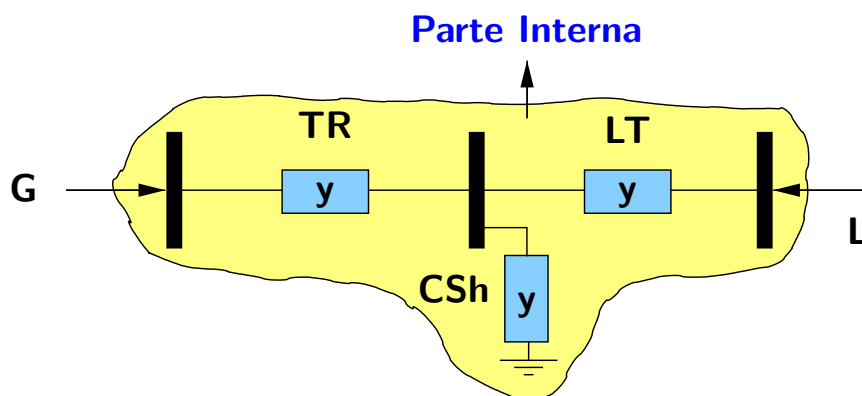
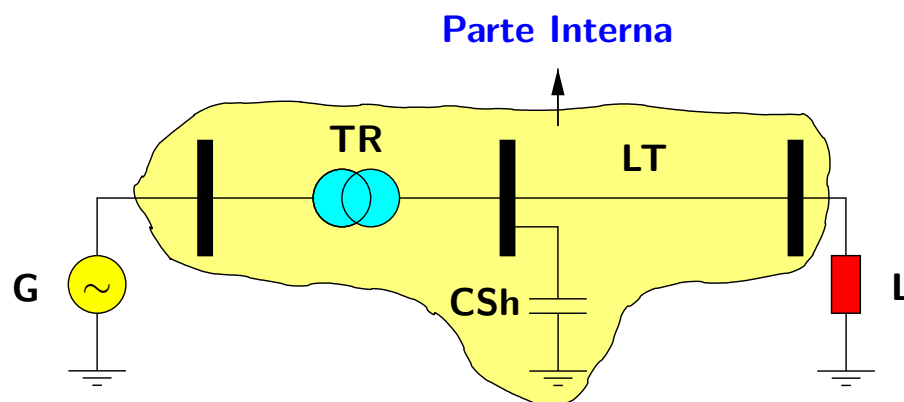


► **Parte Externa** da rede:

- geradores, cargas
- são modelados como injeções de potência nos nós (barras)

Parte Interna da rede:

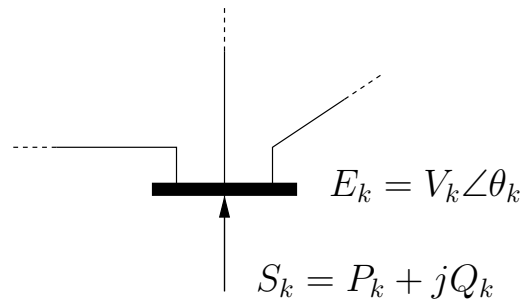
- demais componentes
- são representados na matriz Y



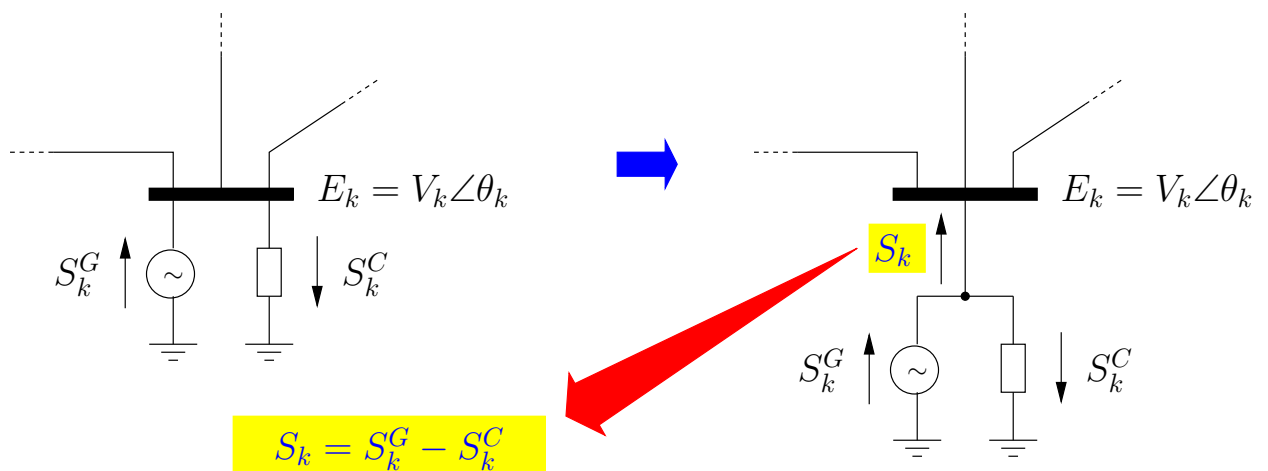
► **Modelo de barras (nós) e ramos.**

2.3 Modelo das barras

- São definidas **quatro variáveis** à barra k , correspondentes à tensão e à injeção de potência na barra.



- V_k magnitude da tensão nodal
- θ_k ângulo da tensão nodal
- P_k injeção líquida de potência ativa
- Q_k injeção líquida de potência reativa



- ▶ **Formulação básica:** duas variáveis são conhecidas (dadas) e as outras duas devem ser calculadas (incógnitas). Dependendo de quais são dadas e quais são incógnitas, define-se três tipos básicos de barras:

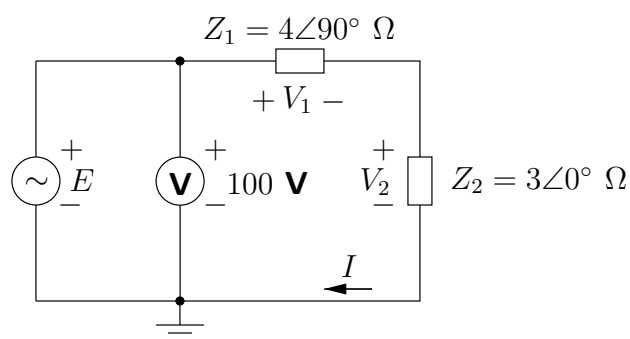
Tipo	Dados	Incógnitas	Características
PQ	P_k, Q_k	V_k, θ_k	Barras de carga
PV	P_k, V_k	Q_k, θ_k	Barras de geração, incluindo condensadores síncronos
Referência (slack, slack, swing)	V_k, θ_k	P_k, Q_k	Barras de geração (geralmente uma unidade geradora de grande capacidade)

- ▶ A barra slack tem duas funções:

(1) Fornecer uma referência angular para a rede (a referência da magnitude de tensão é o próprio nó terra)

■ Exemplo

Calcule a potência ativa consumida pela impedância Z_2 do circuito a seguir.



Utilizando a medição feita pelo voltímetro, define-se a tensão da fonte E como:

$$E = 100\angle\alpha \text{ V}$$

A corrente pelo circuito é:

$$I = \frac{E}{(Z_1 + Z_2)} = 20\angle(\alpha - 53,1^\circ) \text{ A}$$

A potência complexa consumida por Z_2 vale:

$$S_2 = V_2 \cdot I^* = (Z_2 \cdot I) \cdot I^* = Z_2 \cdot |I|^2 = 1,2\angle 0^\circ \text{ kVA}$$

que resulta em uma potência ativa de 1,2 kW.

Comentários:

- os fasores de tensão e corrente dependem de α .
- as defasagens entre os fasores não dependem de α .

- determinou-se a potência consumida sem que se conhecesse o valor de α .
- as potências não dependem dos ângulos de fase das tensões e correntes e sim das diferenças angulares entre as grandezas.

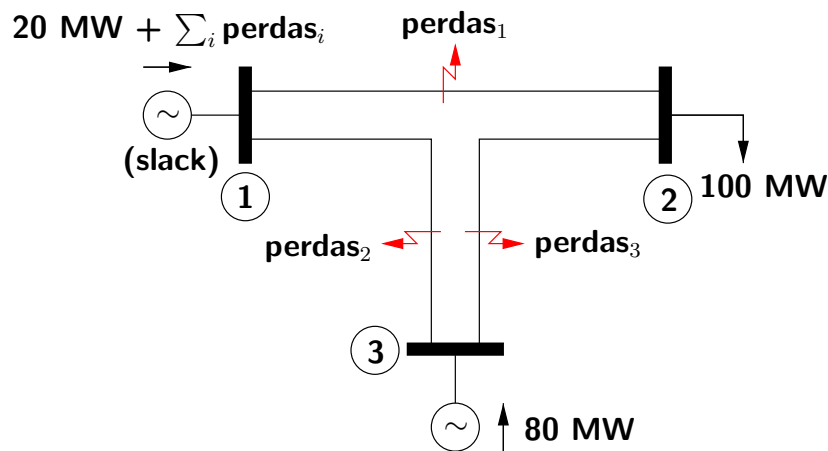
- α pode ser escolhido livremente pois não altera os resultados finais.



(2) Fechar o balanço de potência da rede, levando em conta as perdas de transmissão. As perdas de transmissão não são conhecidas a priori, e devem ser supridas pelas unidades geradoras. Em geral, especifica-se uma barra da rede que suprirá as perdas.

■ Exemplo

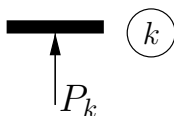
Considere a rede de 3 barras e 3 ramos mostrada a seguir.



Comentários:

- a barra slack deve fornecer 20 MW adicionais para satisfazer a demanda na barra 2, pois o gerador da barra 3 entrega somente 80 MW .
- a barra slack deve fornecer ainda uma quantidade adicional de potência para suprir as perdas de potência nos ramos.

- ▶ Outros tipos de barras podem ser definidos, em função de situações de operação particulares. Alguns deles serão apresentados adiante.
- ▶ Cargas são consideradas como injeções constantes de potência nas barras. Pode-se também representá-las como injeções de potência variáveis que dependem da tensão nodal. Esta representação será mostrada adiante.
- ▶ Convenção para o sentido das injeções de potência: “A injeção de potência em uma barra k será positiva se entrar na barra (geração) e negativa se sair da barra (carga). Esta convenção também é válida para os elementos shunt.”



P_k é mostrada como uma seta entrando na barra k .

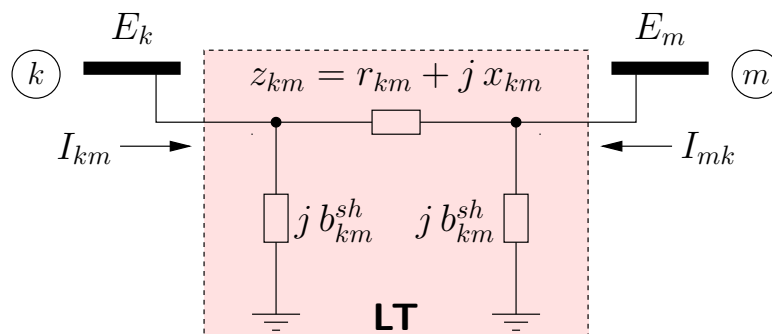
Se $P_k > 0$, a potência está entrando na barra k , logo a potência é **gerada**.

Se $P_k < 0$, a potência está saindo da barra k , logo a potência é **consumida**.

2.4 Modelagem de linhas de transmissão e transformadores – equações de correntes

2.4.1 Linhas de transmissão

► São representadas pelo modelo π equivalente:



resistência série $r_{km} \quad (\geq 0)$
reatância série $x_{km} \quad (\geq 0) \text{ (indutivo)}$
susceptância shunt $b_{km}^{sh} \quad (\geq 0) \text{ (capacitivo)}$

impedância série $z_{km} = r_{km} + j x_{km}$

admitância série $y_{km} = \frac{1}{z_{km}} = g_{km} + j b_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} + j \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$

condutância série $g_{km} \quad (\geq 0)$

susceptância série $b_{km} \quad (\leq 0) \text{ (indutivo)}$

► Corrente saindo da barra k :

$$I_{km} = \underbrace{y_{km} (E_k - E_m)}_{\text{série}} + \underbrace{jb_{km}^{sh} E_k}_{\text{shunt}}$$

$$I_{km} = (y_{km} + jb_{km}^{sh}) E_k - y_{km} E_m$$

em que $E_k = V_k e^{j\theta_k}$ e $E_m = V_m e^{j\theta_m}$.

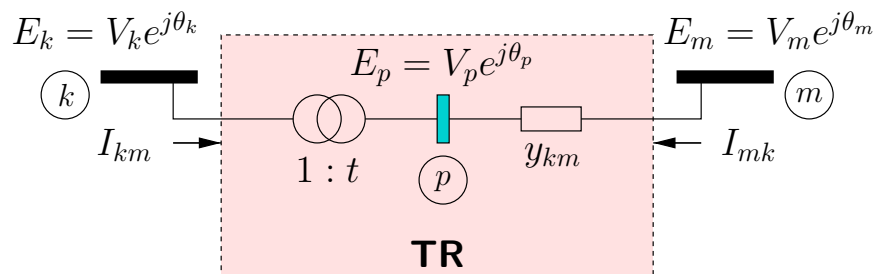
► Corrente saindo da barra m :

$$I_{mk} = \underbrace{y_{km} (E_m - E_k)}_{\text{série}} + \underbrace{jb_{km}^{sh} E_m}_{\text{shunt}}$$

$$I_{mk} = -y_{km} E_k + (y_{km} + jb_{km}^{sh}) E_m$$

2.4.2 Transformadores

► Modelo geral de um transformador:



p

barra intermediária fictícia

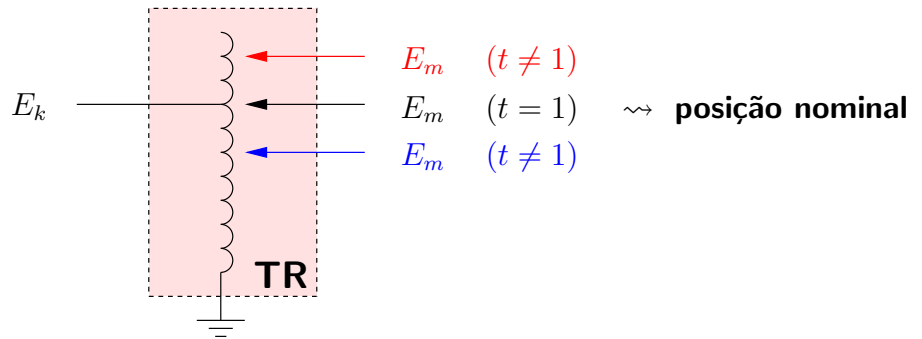
y_{km}

admitância série

t

posição do tap

► Posição do tap:

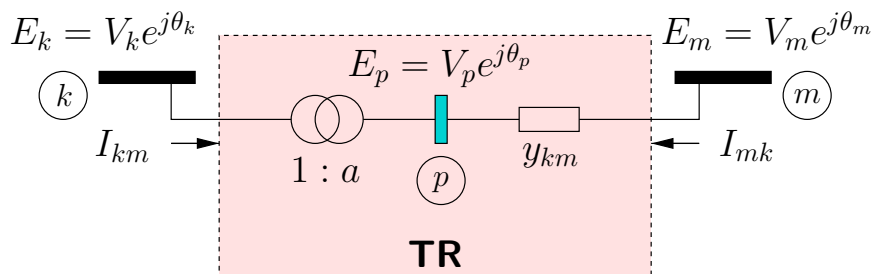


► Tipos de transformadores e valores de t :

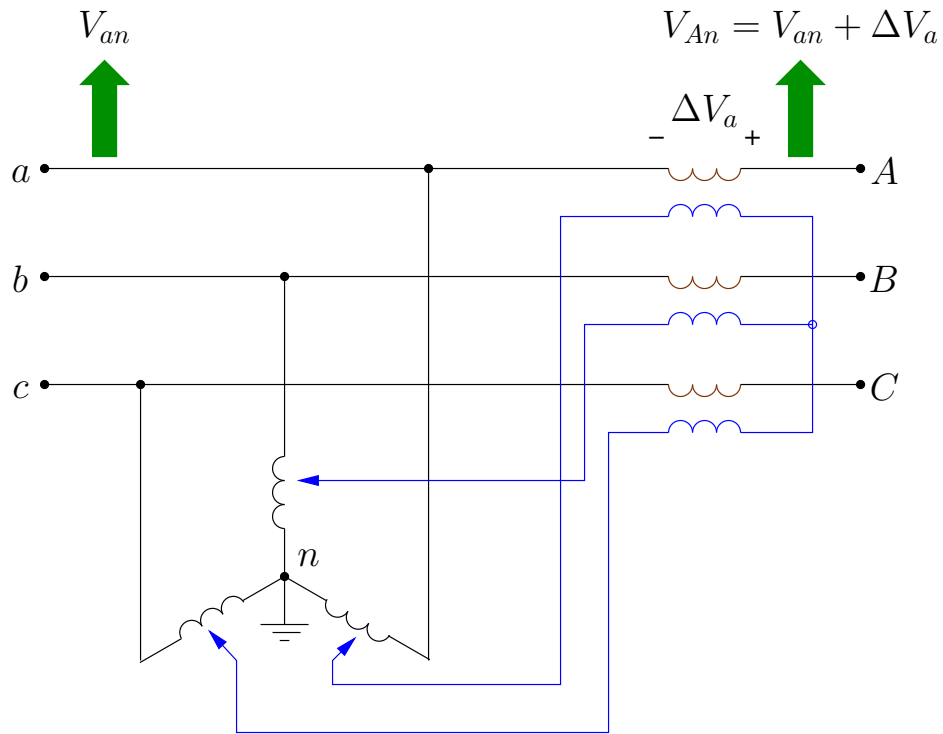
Transformador	Relação de transformação [pu]
em fase	$t = a$ (a é um número real)
defasador	$t = ae^{j\varphi}$

Transformador em fase

► O modelo utilizado é:



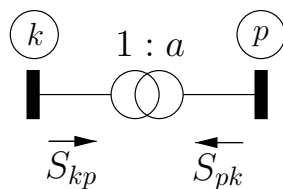
► **Circuito:**



► **Relação entre as tensões para o transformador ideal:**

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{V_p e^{j\theta_p}}{V_k e^{j\theta_k}} = a \quad \rightarrow \quad \begin{cases} V_p = aV_k \\ \theta_p = \theta_k \end{cases}$$

► **Transformador ideal → potência de saída = potência de entrada:**



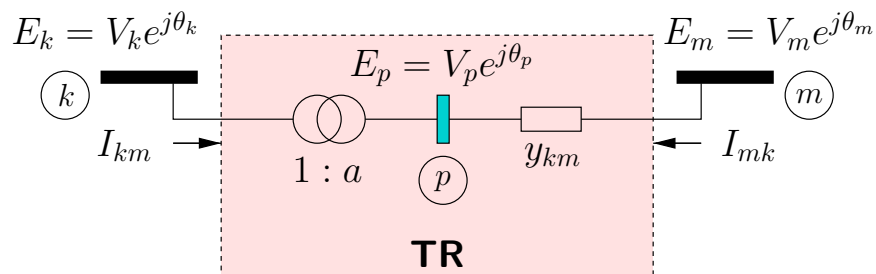
$$\begin{aligned} S_{kp} + S_{pk} &= 0 \\ E_k I_{km}^* + E_p I_{mk}^* &= 0 \\ E_k I_{km}^* + (a E_k I_{mk}^*) &= 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{I_{km}}{I_{mk}} = -a$$

I_{km} e I_{mk} são defasadas de 180° e suas magnitudes estão na razão $a : 1$.

► Voltando à figura do transformador em fase:



e lembrando que:

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{1}{a} = -\frac{I_{mk}}{I_{km}} = \frac{I_{pm}}{I_{km}}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} I_{km} &= aI_{pm} = a(-I_{mk}) \\ &= a[y_{km}(E_p - E_m)] \\ &= ay_{km}(aE_k - E_m) \\ &= (a^2y_{km})E_k + (-ay_{km})E_m \end{aligned}$$

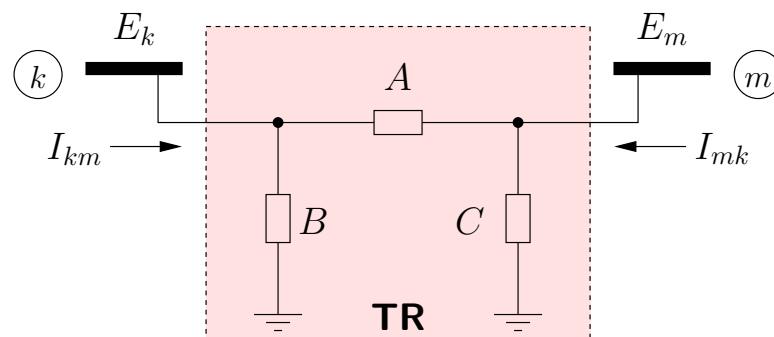
$$\begin{aligned} I_{mk} &= -I_{pm} \\ &= -[y_{km}(E_p - E_m)] \\ &= -y_{km}(aE_k - E_m) \\ &= (-ay_{km})E_k + (y_{km})E_m \end{aligned}$$

Repetindo as duas equações das correntes:

$$I_{km} = (a^2 y_{km}) E_k + (-a y_{km}) E_m$$

$$I_{mk} = (-a y_{km}) E_k + (y_{km}) E_m$$

► Representação do transformador em fase através de um circuito π equivalente:



Através do modelo π do transformador pode-se escrever:

$$I_{km} = (A + B) E_k + (-A) E_m$$

$$I_{mk} = (-A) E_k + (A + C) E_m$$

em que A , B e C têm dimensão de admitância.

Identificando os coeficientes das equações de corrente, pode-se obter os parâmetros A , B e C :

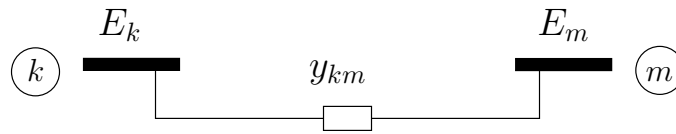
$$A = a y_{km}$$

$$B = a(a - 1) y_{km}$$

$$C = (1 - a) y_{km}$$

► Interpretação:

★ $a = 1 \rightarrow$ tap na posição nominal $\rightarrow B = C = 0 \rightarrow$ o circuito fica reduzido à admitância série y_{km} .



★ $a < 1 \rightarrow B$ apresenta efeito **capacitivo**; C apresenta efeito **indutivo** \rightarrow tendência a aumentar V_k e diminuir V_m .

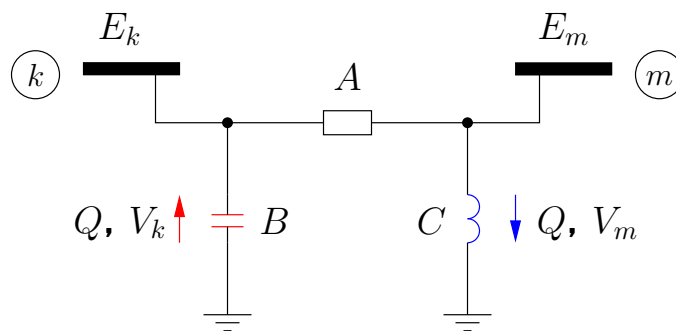
$$B = \underbrace{a(a-1)}_{<0} y_{km}$$

se y_{km} é **indutivo**, B é **capacitivo**.

$$C = \underbrace{(1-a)}_{>0} y_{km}$$

se y_{km} é **indutivo**, C também é **indutivo**.

O modelo π fica:



★ $a > 1 \rightarrow B$ apresenta efeito **indutivo**; C apresenta efeito **capacitivo** \rightarrow tendência a aumentar V_m e diminuir V_k .

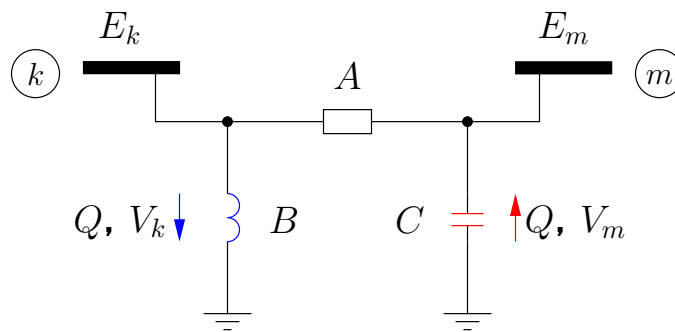
$$B = \underbrace{a(a-1)}_{>0} y_{km}$$

se y_{km} é **indutivo**, B também é **indutivo**.

$$C = \underbrace{(1-a)}_{<0} y_{km}$$

se y_{km} é **indutivo**, C é **capacitivo**.

O modelo π fica:



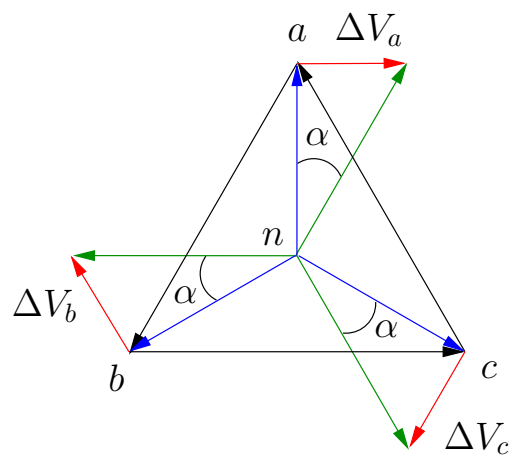
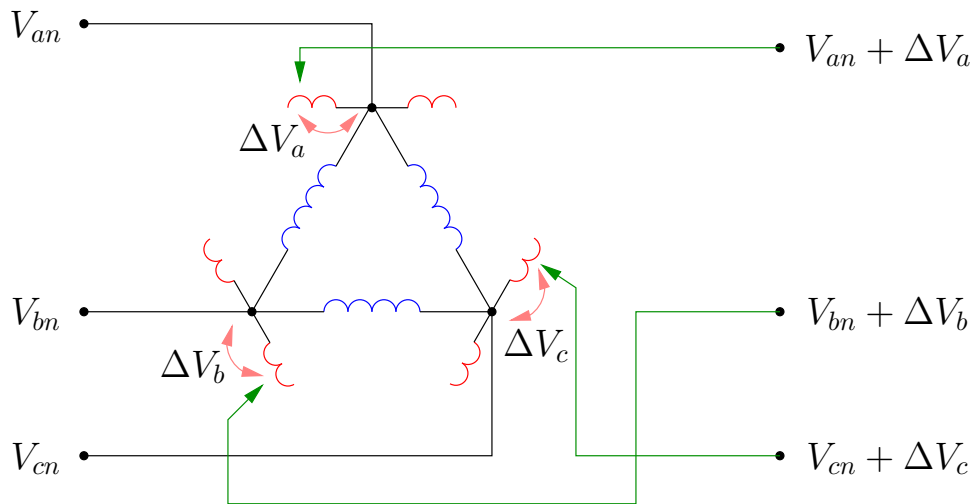
O comportamento neste caso é oposto ao caso anterior ($a < 1$).

- \rightarrow se uma das barras terminais for rígida (barra de tensão regulada – PV ou slack), a outra barra sofrerá os efeitos da mudança do *tap*.
- \rightarrow dependendo da relação de transformação ($1 : a$ ou $a : 1$) e da posição relativa de y_{km} e do transformador ideal, diferentes interpretações são possíveis.

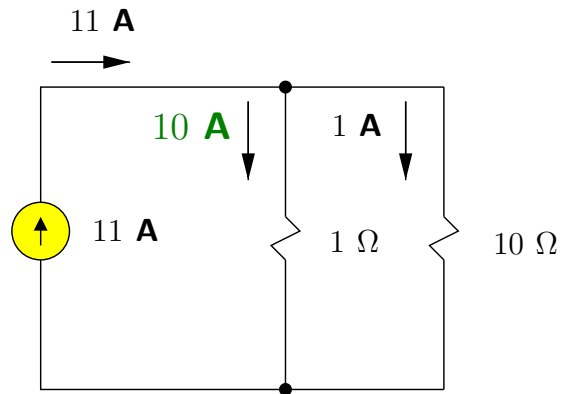
Transformador defasador

- Permite o controle do fluxo de potência ativa através dele.

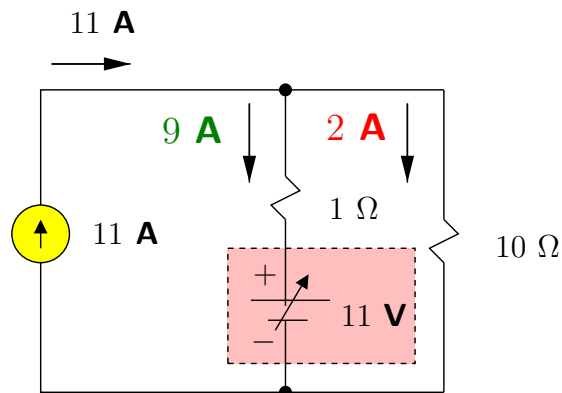
Circuito e funcionamento:



- ▶ Análogo em corrente contínua: inserção de fonte de tensão no ramo no qual se deseja controlar o fluxo de corrente.

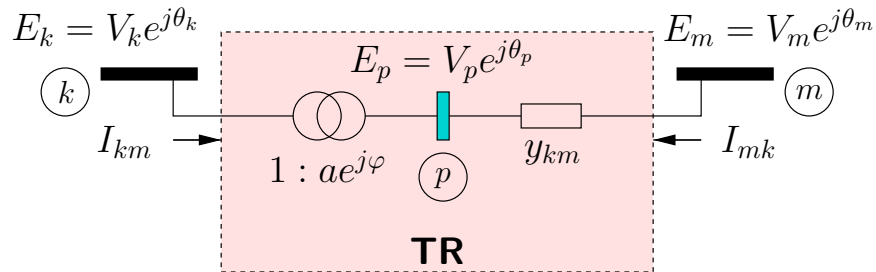


- (a) Situação inicial: fluxo de corrente no ramo de 1Ω é igual a 10 A .



- (b) Deseja-se ajustar o fluxo de corrente no ramo de 1Ω em 9 A → inserir fonte de tensão apropriada no ramo.

► Modelo do transformador defasador:



- Através da análise do princípio de funcionamento do transformador defasador, nota-se que há alteração tanto na magnitude quanto no ângulo de fase da tensão do secundário em relação à tensão do primário, que resulta na relação de transformação $1 : ae^{j\varphi}$.
- Como em geral a é muito próximo de 1 e as magnitudes das tensões não exercem grande influência nos fluxos de potência ativa (será discutido adiante), costuma-se considerar $a = 1$, e definir o **transformador defasador puro**, cuja relação de transformação é $1 : e^{j\varphi}$.

→ Daqui para frente será analisado o transformador defasador puro.

► Neste caso:

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{1}{e^{j\varphi}}$$

$$E_p = E_k e^{j\varphi}$$

$$V_p e^{j\theta_p} = V_k e^{j(\theta_k + \varphi)}$$

Logo:

$$\begin{cases} V_p = V_k \\ \theta_p = \theta_k + \varphi \end{cases}$$

- ▶ Considerando novamente a relação entre as potências de entrada e saída para o transformador ideal:

$$\begin{aligned} E_k I_{km}^* + E_p I_{mk}^* &= 0 \\ E_k I_{km}^* + E_k e^{j\varphi} I_{mk}^* &= 0 \\ I_{km}^* + e^{j\varphi} I_{mk}^* &= 0 \end{aligned}$$

logo:

$$\frac{I_{km}}{I_{mk}} = -e^{-j\varphi} = -t^*$$

- ▶ A corrente I_{mk} vale:

$$\begin{aligned} I_{mk} &= y_{km} (E_m - E_p) \\ &= y_{km} (E_m - t E_k) \\ &= (-t y_{km}) E_k + (y_{km}) E_m \end{aligned}$$

- ▶ Utilizando a relação de transformação de correntes:

$$\begin{aligned} I_{km} &= -t^* I_{mk} \\ &= -t^* [(-t y_{km}) E_k + (y_{km}) E_m] \\ &= (|t|^2 y_{km}) E_k + (-t^* y_{km}) E_m \quad \Rightarrow \quad (|t| = |e^{j\varphi}| = 1) \\ &= (y_{km}) E_k + (-t^* y_{km}) E_m \end{aligned}$$

- ▶ Repetindo as expressões das duas correntes:

$$\begin{aligned} I_{km} &= (y_{km}) E_k + (-t^* y_{km}) E_m \\ I_{mk} &= (-t y_{km}) E_k + (y_{km}) E_m \end{aligned}$$

- ▶ Não é possível obter um circuito equivalente π para o transformador defasador
→ coeficiente de E_m em I_{km} é diferente do coeficiente de E_k em I_{mk} .

Comparar com as expressões de corrente da linha de transmissão e transformador em fase.

- ▶ Será visto adiante que o fluxo de potência ativa em um ramo depende fundamentalmente da chamada **abertura angular** θ_{km} do ramo:

$$P_{km} = f(\theta_{km}) = f(\theta_k - \theta_m)$$

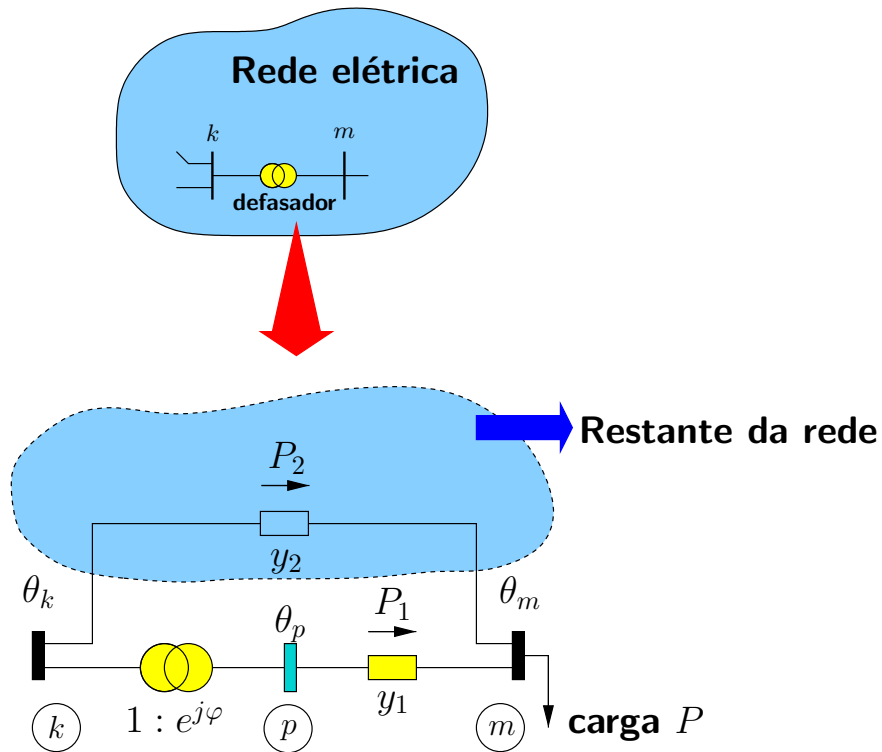
Isto ocorre para redes típicas (especialmente redes de EHV e UHV) onde as reatâncias dos ramos são muito maiores que suas resistências (relações $X/R > 5$ são tipicamente encontradas). Neste ponto, simplesmente assume-se este fato como verdadeiro, e ele será discutido com detalhe mais a frente. Por simplicidade, assume-se:

$$P_{km} = k \cdot (\theta_k - \theta_m)$$

- ▶ Deseja-se fazer uma análise do efeito da variação do ângulo φ do transformador defasador sobre o fluxo de potência ativa no ramo $k - m$.

Para isso, analisa-se o efeito da variação do ângulo φ sobre o fluxo de potência ativa pela admitância y_{km} .

- Considerar a seguinte rede que contém um transformador defasador:



- A admitância y_2 pode ser simplesmente considerada como a admitância do ramo em paralelo com o transformador ou como a **admitância equivalente** do restante da rede vista pelas barras k e m (resultado da redução da rede e eliminação de todas as outras barras exceto k e m).
- Considerar a barra k seja **rígida** $\rightarrow \theta_k$ é fixo.

► A aplicação da lei das correntes de Kirchhoff para o nó m resulta em:

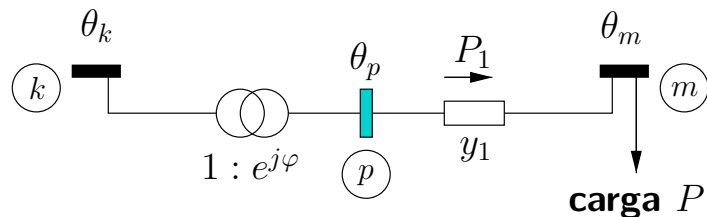
$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 \\
 &= k_1 (\theta_p - \theta_m) + k_2 (\theta_k - \theta_m) \\
 &= k_1 (\theta_k + \varphi - \theta_m) + k_2 (\theta_k - \theta_m) \\
 &= k_1 (\theta_{km} + \varphi) + k_2 \theta_{km}
 \end{aligned}$$

► a equação acima pode ser analisada em várias situações diferentes em função dos valores relativos de y_1 e y_2 :

- $y_2 \ll y_1$ ($z_2 \gg z_1$) – se y_2 for a admitância equivalente do restante da rede, diz-se que o restante da rede é **fraco**:

$$\begin{aligned}
 P_1 &\gg P_2 \\
 P &\approx P_1 = k_1 (\theta_{km} + \varphi)
 \end{aligned}$$

No limite, tem-se $z_2 \rightarrow \infty$, o que significa que o circuito é **radial**, ou seja:



É possível concluir neste caso que:

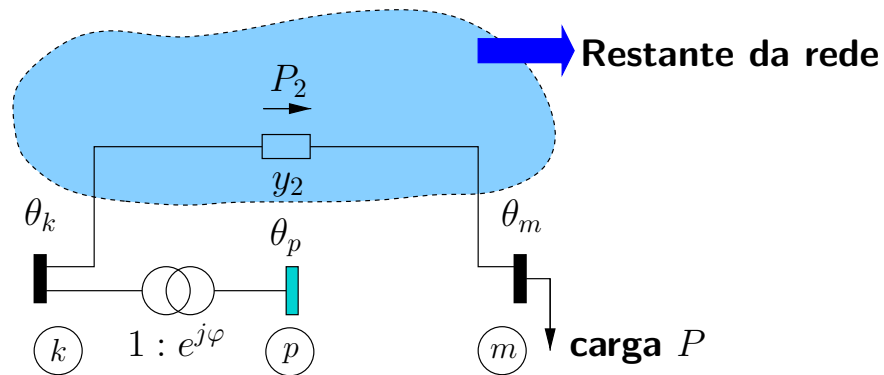
- o fluxo k - m pelo transformador defasador **permanece inalterado** → lei das correntes de Kirchhoff para a barra m → $P_1 = P$ para qualquer valor do ângulo φ .
- a abertura angular sobre admitância permanece inalterada → θ_{pm} é constante.
- como o ângulo de fase θ_k é fixo e $\theta_p = \theta_k + \varphi$ → o ângulo da barra m também varia de φ .

- $y_2 \gg y_1$ ($z_2 \ll z_1$) – restante do sistema é **forte**:

$$P_1 \ll P_2$$

$$P \approx P_2 = k_2 \theta_{km}$$

A variação de φ não afeta o ângulo θ_m (se P e θ_k são fixos, θ_m também permanece constante). O circuito equivalente nesta situação é o seguinte:



Porém, como y_1 existe e há um fluxo de potência por ele, se θ_m permanece inalterado, variações de φ alteram o fluxo de potência por y_1 de $k_1 \varphi$:

$$\begin{aligned} P_1^o &= k_1 (\theta_p - \theta_m) && \text{(para } \varphi = 0) \\ &= k_1 (\theta_k - \theta_m) = k_1 \theta_{km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= k_1 (\theta_p - \theta_m) \\ &= k_1 (\theta_k + \varphi - \theta_m) \\ &= k_1 (\theta_{km} + \varphi) \\ &= P_1^o + k_1 \varphi \end{aligned}$$

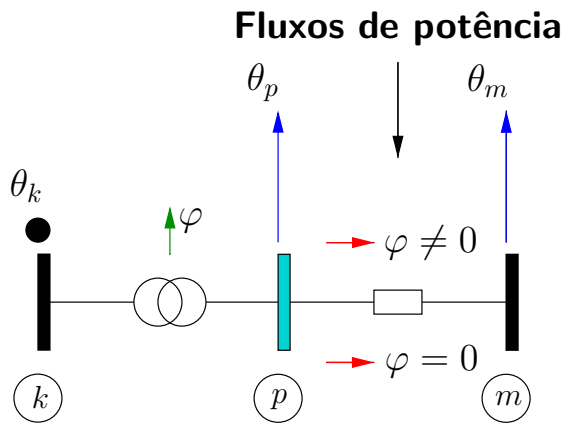
- No limite, tem-se $z_2 \rightarrow 0$ (curto-circuito) → barras k e m curto-circuitadas têm o mesmo ângulo de fase. Neste caso, $k_1\varphi$ é a máxima variação de fluxo que pode ocorrer.
- Quando o restante da rede é **forte**, o fluxo P_1 é pequeno em relação a P_2 , mas é possível controlá-lo completamente, com variação máxima.
- **Exemplo:** se $P_1 = 20$ MW e $P_2 = 500$ MW, tem-se $P_1 \ll P_2$, porém, P_1 tem um valor considerável localmente.

- em geral, para situações intermediárias, o ângulo da barra m é afetado pelo ângulo de defasagem φ :

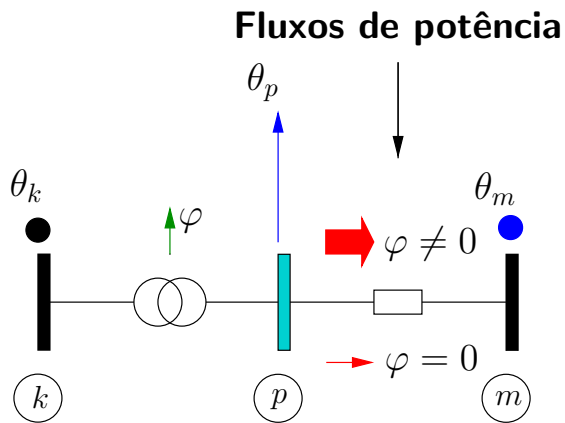
Restante da rede	Abertura angular	Controle sobre o fluxo
fraco	$\theta_{km} = \theta_{km}^o - \varphi$	pequeno
forte	$\theta_{km} = \theta_{km}^o$	grande
intermediário	$\theta_{km} = \theta_{km}^o - \alpha \quad (\alpha < \varphi)$	intermediário

■ **Resumo:**

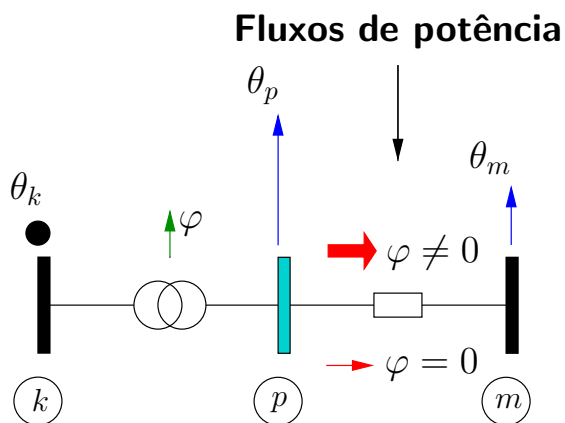
Restante da rede
FRACA
(ou circuito radial)



Restante da rede
FORTE



Restante da rede
INTERMEDIÁRIA



2.4.3 Expressões gerais de correntes

- Em função das similaridades entre as expressões das correntes para a linha de transmissão, transformador em fase e transformador defasador, pode-se obter as seguintes expressões gerais:

$$I_{km} = (|t|^2 y_{km} + jb_{km}^{sh}) E_k + (-t^* y_{km}) E_m$$
$$I_{mk} = (-t y_{km}) E_k + (y_{km} + jb_{km}^{sh}) E_m$$

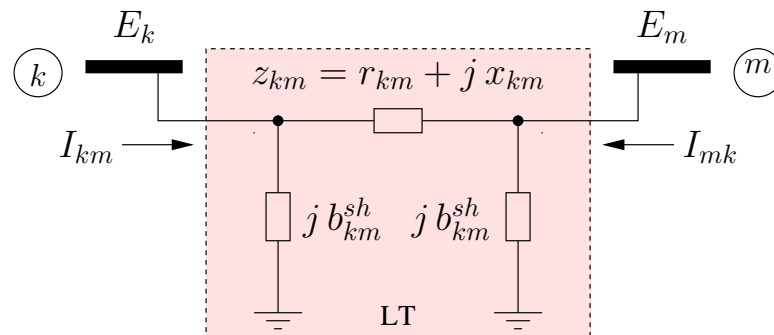
em que $t = a_{km} e^{j\varphi_{km}}$.

Equipamento	Valores de a_{km} , φ_{km} e b_{km}^{sh}
Linha de transmissão	$a_{km} = 1$; $\varphi_{km} = 0$
Transformador em fase	$b_{km}^{sh} = 0$; $\varphi_{km} = 0$
Transformador defasador	$b_{km}^{sh} = 0$; $a_{km} = 1$ (se for defasador puro)

2.5 Modelagem de linhas de transmissão e transformadores – equações de fluxos de potência

2.5.1 Linhas de transmissão

► **Modelo:**



► **O fluxo de potência complexa saindo da barra k em direção à barra m é dado por:**

$$S_{km}^* = P_{km} - jQ_{km} = E_k^* I_{km}$$

Como:

$$I_{km} = y_{km} (E_k - E_m) + j b_{km}^{sh} E_k$$

tem-se:

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= E_k^* [y_{km} (E_k - E_m) + j b_{km}^{sh} E_k] \\ &= y_{km} V_k^2 - y_{km} E_k^* E_m + j b_{km}^{sh} V_k^2 \\ &= (g_{km} + j b_{km} + j b_{km}^{sh}) V_k^2 - (g_{km} + j b_{km}) V_k V_m (\cos \theta_{km} - j \sin \theta_{km}) \end{aligned}$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} P_{km} &= \Re \{ S_{km} \} = g_{km} V_k^2 - V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) \\ Q_{km} &= \Im \{ S_{km} \} = - (b_{km} + b_{km}^{sh}) V_k^2 - V_k V_m (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) \end{aligned}$$

- ▶ De maneira análoga pode-se obter os fluxos de potência ativa e reativa saindo da barra m em direção à barra k :

$$P_{mk} = g_{km} V_m^2 - V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} - b_{km} \sin \theta_{km})$$

$$Q_{mk} = - (b_{km} + b_{km}^{sh}) V_m^2 + V_k V_m (g_{km} \sin \theta_{km} + b_{km} \cos \theta_{km})$$

→ as expressões de P_{mk} e Q_{mk} também podem ser obtidas simplesmente trocando os índices k e m nas expressões de P_{km} e Q_{km} .

- ▶ As perdas de potência na linha são dadas por:

$$P_{perdas} = P_{km} + P_{mk} = g_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km})$$

$$= g_{km} | E_k - E_m |^2$$

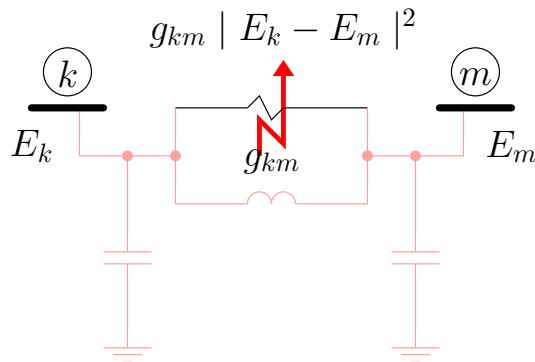
$$Q_{perdas} = Q_{km} + Q_{mk} = -b_{km}^{sh} (V_k^2 + V_m^2) - b_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km})$$

$$= -b_{km}^{sh} (V_k^2 + V_m^2) - b_{km} | E_k - E_m |^2$$

Observações:

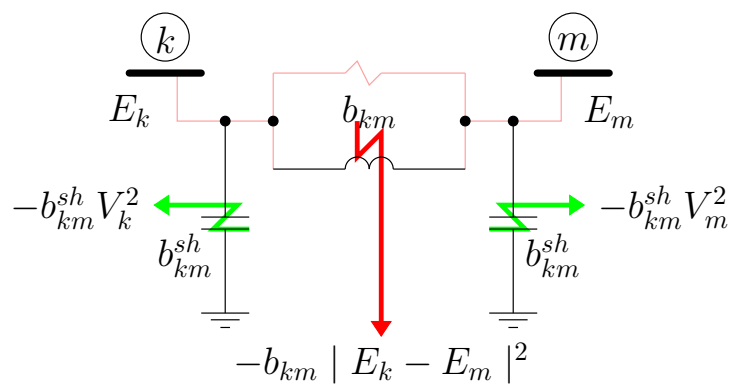
→ $|E_k - E_m|$ é a magnitude da tensão sobre o elemento série

→ $g_{km} |E_k - E_m|^2$ são as perdas ôhmicas



→ $-b_{km} |E_k - E_m|^2$ são as perdas reativas no elemento série ($b_{km} < 0$; potência positiva – **consumida**)

→ $-b_{km}^{sh} (V_k^2 + V_m^2)$ corresponde à geração de potência reativa nos elementos shunt ($b_{km}^{sh} > 0$; potência negativa – **fornecida**)



2.5.2 Transformadores

Transformador em fase

- ▶ Corrente em um transformador em fase (obtida anteriormente):

$$I_{km} = a_{km} y_{km} (a_{km} E_k - E_m)$$

- ▶ Fluxo de potência complexa:

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= P_{km} - jQ_{km} \\ &= E_k^* I_{km} \\ &= V_k e^{-j\theta_k} \cdot [a_{km} y_{km} (a_{km} V_k e^{j\theta_k} - V_m e^{j\theta_m})] \\ &= a_{km}^2 (g_{km} + jb_{km}) V_k^2 - a_{km} (g_{km} + jb_{km}) V_k V_m (\cos \theta_{km} - j \sin \theta_{km}) \end{aligned}$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} P_{km} &= (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) \\ Q_{km} &= - (a_{km} V_k)^2 b_{km} - (a_{km} V_k) V_m (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) \end{aligned}$$

- ▶ Com relação às expressões obtidas para linhas de transmissão, as do transformador em fase:

- não têm o termo que depende de b_{km}^{sh}
- apresentam $(a_{km} V_k)$ no lugar de V_k

Exercício Obter as expressões de P_{mk} , Q_{mk} , P_{perdas} e Q_{perdas} para o transformador em fase.

Transformador defasador

- ▶ Corrente em um transformador defasador puro (obtida anteriormente):

$$\begin{aligned} I_{km} &= y_{km} (E_k - e^{-j\varphi_{km}} E_m) \\ &= y_{km} e^{-j\varphi_{km}} (E_k e^{j\varphi_{km}} - E_m) \end{aligned}$$

- ▶ Fluxo de potência complexa:

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= P_{km} - jQ_{km} \\ &= E_k^* I_{km} \\ &= y_{km} V_k e^{-j(\theta_k + \varphi_{km})} (V_k e^{j(\theta_k + \varphi_{km})} - V_m e^{j\theta_m}) \end{aligned}$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} P_{km} &= V_k^2 g_{km} - V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km})] \\ Q_{km} &= -V_k^2 b_{km} - V_k V_m [g_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) - b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km})] \end{aligned}$$

- ▶ Com relação às expressões obtidas para linhas de transmissão, as do transformador defasador:
 - não têm o termo que depende de b_{km}^{sh}
 - apresentam $(\theta_{km} + \varphi_{km})$ no lugar de θ_{km}

Exercício Obter as expressões de P_{mk} , Q_{mk} , P_{perdas} e Q_{perdas} para o transformador defasador.

2.5.3 Expressões gerais dos fluxos de potência

- ▶ Em função das similaridades entre as expressões dos fluxos de potência para a linha de transmissão, transformador em fase e transformador defasador, pode-se obter expressões gerais.
- ▶ Essas expressões são obtidas através de:

$$S_{km}^* = E_k^* I_{km}$$

$$S_{mk}^* = E_m^* I_{mk}$$

onde se consideram as seguintes expressões gerais de corrente (apresentadas anteriormente):

$$I_{km} = (|t|^2 y_{km} + j b_{km}^{sh}) E_k + (-t^* y_{km}) E_m$$

$$I_{mk} = (-t y_{km}) E_k + (y_{km} + j b_{km}^{sh}) E_m$$

em que $t = a_{km} e^{j\varphi_{km}}$. A substituição das equações das correntes nas equações das potências resulta em:

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 g_{km} -$$

$$(a_{km} V_k) V_m [g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km})]$$

$$Q_{km} = - (a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) -$$

$$(a_{km} V_k) V_m [g_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) - b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km})]$$

$$P_{mk} = g_{km} V_m^2 -$$

$$(a_{km} V_k) V_m [g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km})]$$

$$Q_{mk} = - (b_{km} + b_{km}^{sh}) V_m^2 +$$

$$(a_{km} V_k) V_m [g_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) + b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km})]$$

Equipamento

Valores de a_{km} , φ_{km} e b_{km}^{sh}

Linha de transmissão

$$a_{km} = 1; \varphi_{km} = 0$$

Transformador em fase

$$b_{km}^{sh} = 0; \varphi_{km} = 0$$

Transformador defasador

$$b_{km}^{sh} = 0; a_{km} = 1 \text{ (se for defasador puro)}$$

- **Convenção para os fluxos de potência: “Os fluxos de potência em ramos são positivos se saem da barra e negativos se entram na barra.”**



P_{km} e P_{mk} são definidos como setas saindo da barra do primeiro índice em direção à barra do segundo índice.

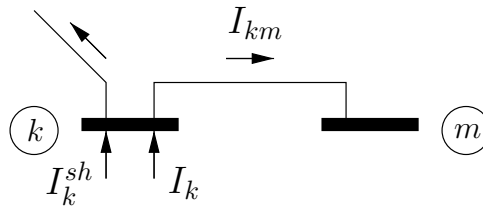
Se $P_{km} > 0$, o fluxo de potência é da barra k para a barra m .

Se $P_{km} < 0$, o fluxo de potência é da barra m para a barra k .

O mesmo vale para P_{mk} .

2.6 Formulação matricial – $I = Y \cdot E$

- ▶ Aplicação da lei das correntes de Kirchhoff para uma certa barra k :



$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, \text{NB}$$

em que:

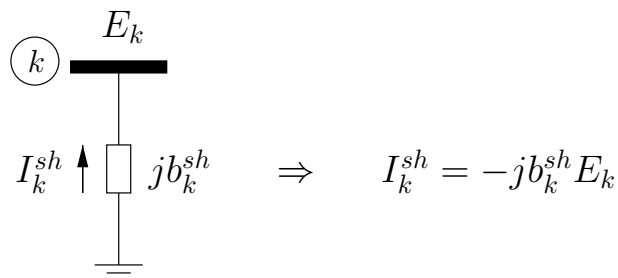
Ω_k é o conjunto composto pelas barras vizinhas da barra k .

NB é o número total de barras da rede.

- ▶ Expressão geral da corrente em um ramo k - m :

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + j b_{km}^{sh}) E_k + (-a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km}) E_m$$

- ▶ A corrente I_k^{sh} é a corrente por um elemento reativo (indutor ou capacitor) ligado entre a barra k e o nó terra:

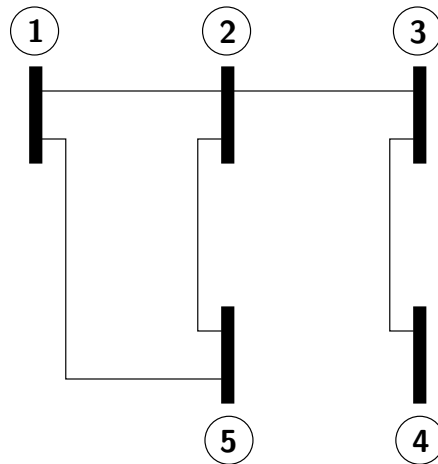


► Injeção líquida de corrente na barra k :

$$\begin{aligned}
 I_k &= \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} - I_k^{sh} \\
 &= \sum_{m \in \Omega_k} [(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km}) E_k + (-a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km}) E_m] - (-jb_k^{sh} E_k) \\
 &= \left[jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km}) \right] E_k + \sum_{m \in \Omega_k} [(-a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km}) E_m] \\
 \text{para } &k = 1, \dots, \text{NB}
 \end{aligned}$$

■ Exemplo

Considere a rede de 5 barras e 5 ramos a seguir:



Aplicando a equação da corrente nodal para cada barra da rede, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= Y_{11}E_1 + Y_{12}E_2 && + Y_{15}E_5 \\
 I_2 &= Y_{21}E_1 + Y_{22}E_2 + Y_{23}E_3 && + Y_{25}E_5 \\
 I_3 &= & Y_{32}E_2 + Y_{33}E_3 + Y_{34}E_4 \\
 I_4 &= & Y_{43}E_3 + Y_{44}E_4 \\
 I_5 &= Y_{51}E_1 + Y_{52}E_2 && + Y_{55}E_5
 \end{aligned}$$

Observações:

- os coeficientes Y_{ij} dependem dos parâmetros dos ramos.
- Y_{ij} será não nulo quando houver ramo ligando as barras i e j .



-
- A partir das expressões das injeções de corrente de todas as barras da rede (I_k para $k = 1, \dots, \text{NB}$) pode-se obter uma expressão na forma matricial:

$$I = Y \cdot E$$

em que:

- I – vetor das injeções de corrente, cujos elementos são $I_k, k = 1, \dots, \text{NB}$;
- E – vetor das tensões nodais, cujos elementos são $E_k, k = 1, \dots, \text{NB}$;
- $Y = G + jB$ – matriz admitância nodal, composta pelas matrizes condutância nodal (G) e susceptância nodal (B).

■ Exemplo

Para a rede de 5 barras e 5 ramos:

$$\begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline I_4 \\ \hline I_5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & 0 & 0 & Y_{15} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & 0 & Y_{25} \\ \hline 0 & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & 0 \\ \hline 0 & 0 & Y_{43} & Y_{44} & 0 \\ \hline Y_{51} & Y_{52} & 0 & 0 & Y_{55} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline E_1 \\ \hline E_2 \\ \hline E_3 \\ \hline E_4 \\ \hline E_5 \\ \hline \end{array}$$



- ▶ Os elementos da matriz Y são obtidos dos coeficientes das tensões E_i da expressão da injeção de corrente I_k :

$$\begin{aligned}
 Y_{km} &= -a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km} && \rightarrow \text{fora da diagonal} \\
 Y_{mk} &= -a_{km} e^{j\varphi_{km}} y_{km} && \rightarrow \text{fora da diagonal} \\
 Y_{kk} &= j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km}) && \rightarrow \text{diagonal}
 \end{aligned}$$

Observações:

- Y é esparsa (grande número de elementos nulos)

$Y_{km} = 0$ se não há um ramo (linha ou transformador) conectando as barras k e m

Y_{kk} é sempre não nulo

- Se os ramos forem somente linhas de transmissão e transformadores em fase → matriz Y é estrutural e numericamente simétrica
- Se houver transformadores defasadores → matriz Y é estruturalmente simétrica mas numericamente assimétrica ($Y_{km} = -t^* y_{km}$ e $Y_{mk} = -t y_{km} \neq Y_{km}$)
- Um transformador conectado entre as barras k e m contribui para a matriz Y da seguinte forma (ver exercício proposto na lista):

$$\begin{aligned}
 Y_{km} &= -t^* y_{km} \\
 Y_{mk} &= -t y_{km} \\
 Y_{kk} &= |t|^2 y_{km} + (\text{termos dos outros ramos conectados a } k) \\
 Y_{mm} &= y_{km} + (\text{termos dos outros ramos conectados a } m)
 \end{aligned}$$

Ver exercícios propostos na lista para diferentes representações de transformadores.

■ Exemplo

Considere que uma rede tenha 1000 barras (NB) e 2000 ramos (NR).

Define-se o **grau de esparsidade** como a porcentagem de elementos nulos da matriz Y em relação ao número total de elementos. Para a rede exemplo tem-se:

$$\text{Número total de elementos de } Y: \quad NT = NB^2 \quad \rightarrow \quad NT = 1000000$$

$$\text{Número de elementos não nulos:} \quad NE = NB + 2 \cdot NR \quad \rightarrow \quad NE = 5000$$

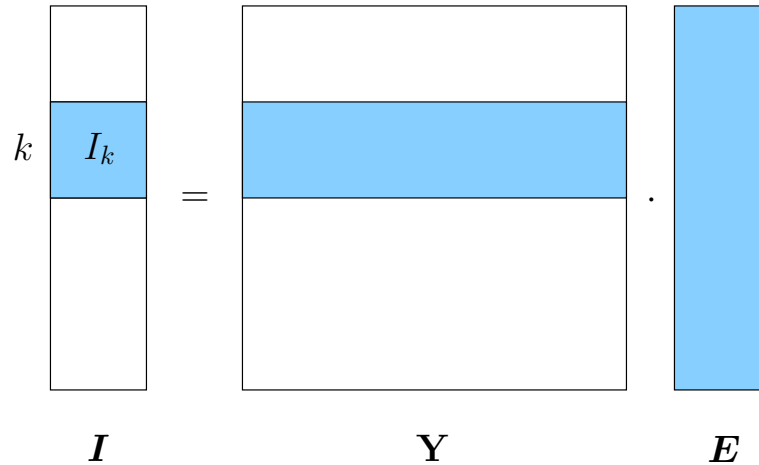
$$\text{Número de elementos nulos:} \quad NN = NT - NE \quad \rightarrow \quad NN = 995000$$

$$\text{Grau de esparsidade:} \quad GE = (NN/NT) \cdot 100\% \quad \rightarrow \quad GE = 99,5\%$$



2.7 Potências nodais

- Expressão da injeção de corrente na barra k em função dos elementos da matriz admitância:



$$I_k = \sum_{m=1}^{\text{NB}} Y_{km} E_m = \sum_{m \in \mathcal{K}} Y_{km} E_m = Y_{kk} E_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km} E_m$$

em que \mathcal{K} é o conjunto formado pela barra k mais todas as barras m conectadas ela $\rightsquigarrow \mathcal{K} = \Omega_k \cup \{k\}$

- Injeção líquida de potência complexa na barra k :

$$\begin{aligned} S_k^* &= P_k - jQ_k \\ &= E_k^* I_k \\ &= E_k^* \left(\sum_{m \in \mathcal{K}} Y_{km} E_m \right) \\ &= V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m \in \mathcal{K}} (G_{km} + jB_{km}) (V_m e^{j\theta_m}) \\ &= V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} (G_{km} + jB_{km}) (V_m e^{-j\theta_{km}}) \\ &= V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m (G_{km} + jB_{km}) (\cos \theta_{km} - j \text{sen } \theta_{km}) \end{aligned}$$

Identificando as partes real e imaginária, obtém-se as equações das potências nodais:

$$P_k = V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})$$

para $k = 1, \dots, \text{NB}$.

→ têm-se duas equações para cada barra da rede, resultando em um total de $(2 \cdot \text{NB})$ equações.

- ▶ Há uma outra formulação (mais utilizada na prática) em que os ângulos dos transformadores defasadores são representados nas equações de potência e não na matriz Y , resultando em uma matriz Y' sempre estrutural e numericamente simétrica.

Definir uma matriz Y' tal que seus elementos sejam os seguintes:

$$Y'_{ij} = Y_{ij} \cdot e^{j\varphi_{ij}}$$

ou seja, seus elementos fora da diagonal são:

$$\begin{aligned} Y'_{ij} &= Y_{ij} \cdot e^{j\varphi_{ij}} \\ &= (-a_{ij}y_{ij}e^{-j\varphi_{ij}}) \cdot e^{j\varphi_{ij}} \\ &= -a_{ij}y_{ij} \end{aligned}$$

e os da diagonal são:

$$\begin{aligned} Y'_{ii} &= Y_{ii} \cdot \underbrace{e^{j\varphi_{ii}}}_{=e^{j0}=1} \\ &= Y_{ii} \\ &= jb_i^{sh} + \sum_{m \in \Omega_i} (jb_{im}^{sh} + a_{im}^2 y_{im}) \end{aligned}$$

Portanto os ângulos de defasagem φ não aparecem em Y' .

Voltando à equação da injeção de corrente nodal:

$$\begin{aligned}
 I_k &= \sum_{m \in \mathcal{K}} Y_{km} E_m && \times (e^{j\varphi_{km}} / e^{j\varphi_{km}}) \\
 &= \sum_{m \in \mathcal{K}} Y_{km} \left(\frac{e^{j\varphi_{km}}}{e^{j\varphi_{km}}} \right) E_m \\
 &= \sum_{m \in \mathcal{K}} Y'_{km} \left(\frac{1}{e^{j\varphi_{km}}} \right) E_m \\
 &= \sum_{m \in \mathcal{K}} Y'_{km} e^{-j\varphi_{km}} E_m
 \end{aligned}$$

A injeção líquida de potência complexa na barra k é:

$$\begin{aligned}
 S_k^* &= P_k - jQ_k \\
 &= E_k^* I_k \\
 &= E_k^* \left(\sum_{m \in \mathcal{K}} Y'_{km} e^{-j\varphi_{km}} E_m \right) \\
 &= V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m \in \mathcal{K}} (G'_{km} + jB'_{km}) e^{-j\varphi_{km}} (V_m e^{j\theta_m}) \\
 &= V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m (G'_{km} + jB'_{km}) e^{-j(\theta_{km} + \varphi_{km})} \\
 &= V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m (G'_{km} + jB'_{km}) [\cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - j \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km})]
 \end{aligned}$$

Identificando as partes real e imaginária, obtém-se as equações das potências nodais:

$$\begin{aligned}
 P_k &= V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m [G'_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + B'_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km})] \\
 Q_k &= V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m [G'_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) - B'_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km})]
 \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, \text{NB}$.

Para simplificar a notação, a matriz Y' é chamada simplesmente de Y e as equações das potências nodais ficam:

$$P_k = V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m [G_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + B_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km})]$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m [G_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) - B_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km})]$$

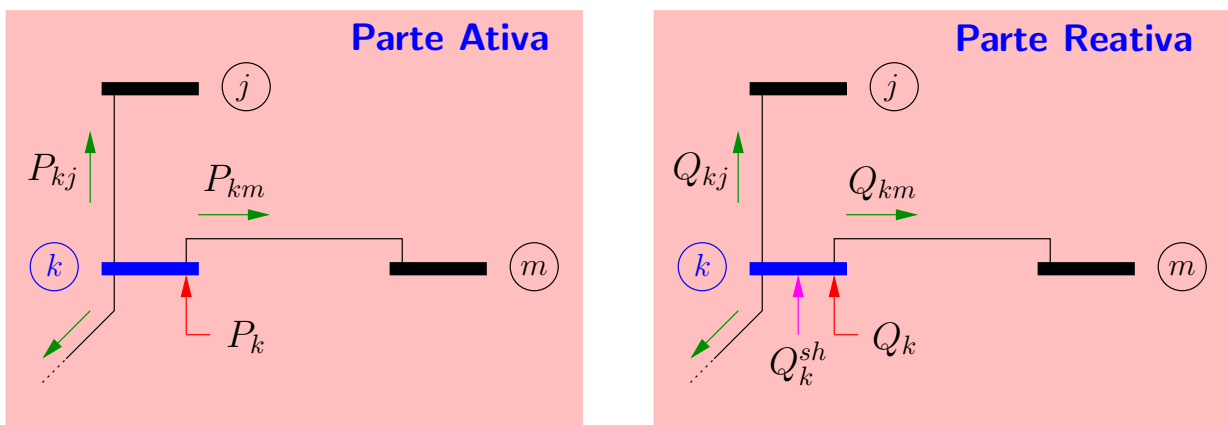
para $k = 1, \dots, \text{NB}$.

2.8 Conjunto de equações do problema de fluxo de carga

- ▶ Aplicação da lei das correntes de Kirchhoff (LCK) para cada barra corresponde ao balanço de potências na barra:

Potência injetada na barra = soma das potências distribuídas pelos ramos conectados a ela.

- ▶ São realizados os balanços das potências ativa e reativa.
- ▶ Considerar uma barra k de uma rede elétrica:



Matematicamente:

$$P_k = P_{G_k} - P_{C_k} = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km} (V_k, V_m, \theta_k, \theta_m)$$
$$Q_k + Q_k^{sh} (V_k) = Q_{G_k} - Q_{C_k} + Q_k^{sh} (V_k) = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} (V_k, V_m, \theta_k, \theta_m)$$

em que:

$k = 1, \dots, \mathbf{NB}$.

NB número de barras da rede.

Ω_k conjunto das barras vizinhas da barra k (diretamente conectadas à barra k).

V_k, V_m magnitudes das tensões nas barras k e m .

θ_k, θ_m ângulos de fase das tensões nas barras k e m .

P_{km} fluxo de potência ativa no ramo k - m .

Q_{km} fluxo de potência reativa no ramo k - m .

Q_k^{sh} componente da injeção de potência reativa devida ao elemento *shunt* da barra k (capacitores ou indutores). $Q_k^{sh} = b_k^{sh} \cdot V_k^2$, sendo b_k^{sh} a susceptância *shunt* ligada entre a barra k e o nó terra.

- ▶ Além das equações referentes à aplicação de LCK às barras, faz parte do problema de fluxo de carga um conjunto de inequações que representam os limites operacionais da rede. Por exemplo:

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \rightarrow \quad \text{limites de tensão em barras de carga}$$
$$Q_k^{min} \leq Q_k \leq Q_k^{max} \quad \rightarrow \quad \text{limites de injeções de potência reativa em barras de geração}$$

- ▶ Outros tipos de restrições serão mostrados adiante.