
Capítulo 3

Métodos de resolução do problema de fluxo de carga

3.1 Métodos iterativos baseados na matriz Y

- ▶ Baseados na resolução do sistema de equações lineares $I = Y \cdot E$ de maneira iterativa
- ▶ Exemplos: Gauss/Gauss-Seidel, Glimn-Stagg, Ward-Hale, etc.

3.1.1 Métodos de Gauss/Gauss-Seidel

- ▶ Considerar um sistema de n equações algébricas lineares $A \cdot x = b$
Tomando a linha i da equação matricial acima:

The diagram shows a matrix A with a red shaded row i and a red shaded column i . The element A_{ii} is highlighted in the intersection. To the right, a vector x has a red shaded element x_i , and a vector b has a red shaded element b_i . The equation is represented as $A \cdot x = b$.

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, \dots, n$$
$$A_{ii}x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

Resolvendo para x_i tem-se:

$$x_i = \frac{1}{A_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j \right) \quad i = 1, \dots, n$$

Para uma iteração ($m + 1$), o processo iterativo pode ser definido como:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j^{(m)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$



Método de Gauss



Para a obtenção de $x_i^{(m+1)}$ são utilizados os valores de $x_i^{(m)}$ (todos os valores da iteração anterior)

Uma forma alternativa para o processo iterativo é:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(m)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$



Método de Gauss-Seidel



Para a obtenção de $x_i^{(m+1)}$ são utilizados os valores mais recentes disponíveis dos elementos do vetor x

■ Exemplo

Processo iterativo utilizando os métodos de Gauss e Gauss-Seidel para $n = 3$:

Gauss

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{A_{11}} \cdot \left[b_1 - \left(A_{12}x_2^{(m)} + A_{13}x_3^{(m)} \right) \right]$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{A_{22}} \cdot \left[b_2 - \left(A_{21}x_1^{(m)} + A_{23}x_3^{(m)} \right) \right]$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{A_{33}} \cdot \left[b_3 - \left(A_{31}x_1^{(m)} + A_{32}x_2^{(m)} \right) \right]$$

Gauss-Seidel

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{A_{11}} \cdot \left[b_1 - \left(A_{12}x_2^{(m)} + A_{13}x_3^{(m)} \right) \right]$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{A_{22}} \cdot \left[b_2 - \left(A_{21}x_1^{(m+1)} + A_{23}x_3^{(m)} \right) \right]$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{A_{33}} \cdot \left[b_3 - \left(A_{31}x_1^{(m+1)} + A_{32}x_2^{(m+1)} \right) \right]$$



3.1.2 Resolução do problema de fluxo de carga pelo método de Gauss-Seidel

- ▶ Os sistemas de potência podem ser modelados como um sistema de equações algébricas lineares:

$$I = Y \cdot E$$

- ▶ O equacionamento para a utilização do método de Gauss-Seidel é:

$$S_k^* = E_k^* \cdot I_k = E_k^* \cdot \sum_{n \in \mathcal{K}} Y_{kn} E_n = E_k^* \cdot \sum_{n \in \Omega_k} Y_{kn} E_n + E_k^* Y_{kk} E_k$$

em que Ω_k é o conjunto de barras vizinhas da barra k e \mathcal{K} é o conjunto das barras em Ω_k mais a própria barra k .

A tensão E_k é obtida por:

$$E_k = \frac{1}{Y_{kk}} \cdot \left(\frac{S_k^*}{E_k^*} - \sum_{n \in \Omega_k} Y_{kn} E_n \right)$$

Utilizando o método de Gauss-Seidel tem-se, para uma iteração $(m + 1)$:

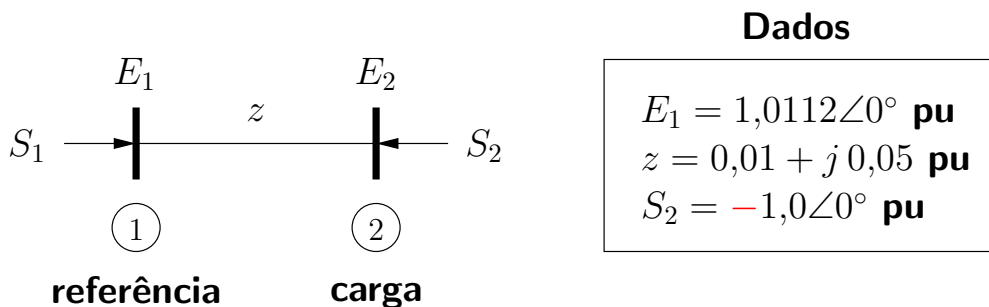
$$E_k^{(m+1)} = \frac{1}{Y_{kk}} \cdot \left(\frac{S_k^*}{E_k^{(m)*}} - \sum_{n=1}^{k-1} Y_{kn} E_n^{(m+1)} - \sum_{n=k+1}^{\text{NB}} Y_{kn} E_n^{(m)} \right)$$

em que NB é o número total de barras.

- ▶ O valor de S_k utilizado na expressão de $E_k^{(m+1)}$ depende do tipo de barra:
 - Se a barra for PQ, S_k é especificado;
 - Se a barra for PV, somente P_k é especificado (Q_k é calculado). Então, estima-se Q_k com base nos valores atuais das tensões.
- ▶ Se a barra for slack, a tensão não é atualizada. Se a barra for PV, somente a magnitude da tensão é atualizada.

■ Exemplo

Considere a rede de 2 barras e 1 linha de transmissão mostrada a seguir.



A matriz admitância da rede é:

$$Y = \begin{bmatrix} 3,8462 - j 19,2308 & -3,8462 + j 19,2308 \\ -3,8462 + j 19,2308 & 3,8462 - j 19,2308 \end{bmatrix}$$

A atualização da tensão E_2 é realizada por:

$$E_2^{(m+1)} = \frac{1}{Y_{22}} \left[\left(\frac{S_2}{E_2^{(m)}} \right)^* - Y_{21} E_1 \right]$$

O resultado do processo iterativo é:

Iteração	E_2 [pu]
0	$1 + j 0$
1	$1,0012 - j 0,0500$
2	$0,9987 - j 0,0493$
3	$0,9987 - j 0,0494$
4	$0,9987 - j 0,0494$

↪ **Solução:** $E_2 = 1 \angle -2,8^\circ \text{ pu}$

A potência na barra de referência é:

$$S_1 = E_1 I_{12}^* = E_1 \left[\frac{1}{z} (E_1 - E_2) \right]^* = 1,01 + j 0,05 \text{ pu}$$



3.1.3 Aceleração da convergência

- ▶ A convergência pode ser acelerada através da utilização de parâmetros de aceleração.

O método mais popular é o chamado **método SOR (successive overrelaxation)**.

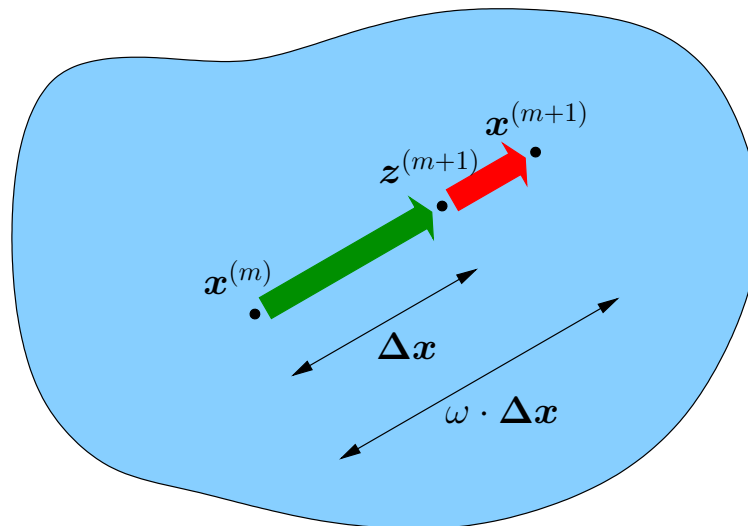
Para o método Gauss-Seidel:

$$z_i^{(m+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(m)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$
$$x_i^{(m+1)} = \omega z_i^{(m+1)} + (1 - \omega) x_i^{(m)} \quad i = 1, \dots, n$$

- ▶ $\omega = 1 \rightarrow$ **Gauss-Seidel sem aceleração.**

- ▶ A aceleração corresponde a uma extrapolação:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(m+1)} &= \mathbf{x}^{(m)} + \omega \cdot \left(\mathbf{z}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)} \right) \\ &= \mathbf{x}^{(m)} + \omega \cdot \Delta \mathbf{x}\end{aligned}$$



- ▶ Para cada problema existe um ω ótimo, mas para a maioria dos problemas práticos, valores aproximados (empíricos) são escolhidos.

Várias tentativas foram feitas para se obter um valor ótimo de ω . Em geral, o esforço de obtenção não compensa.

- ▶ Aceleração também pode ser usada para a solução de redes elétricas, onde normalmente se escolhe um fator de aceleração $1 < \omega < 2$. Uma boa escolha de ω pode resultar em uma taxa de convergência de até duas vezes a original.

3.1.4 Avaliação dos métodos baseados na matriz Y

- ▶ Método simples.
- ▶ Número de elementos da somatória é pequeno (valor típico é 3).
- ▶ Pequeno espaço de armazenamento é necessário. No caso do método de Gauss-Seidel os valores da iteração anterior não precisam ser armazenados.
- ▶ Pequeno número de cálculos por iteração.
- ▶ Convergência lenta.
- ▶ O método converge se Y é diagonal dominante:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |Y_{ij}| < |Y_{ii}| \quad i = 1, \dots, n$$

- Em sistemas elétricos esta característica é normalmente encontrada.
- Entre os fatores que podem afetar a dominância diagonal e também a convergência do método estão:
 - junção de impedâncias série muito grandes e pequenas;
 - capacitâncias grandes (como em cabos);
 - linhas EHV longas;
 - compensação série e shunt.
- ▶ A escolha da barra de referência afeta as características de convergência. A melhor escolha é a barra para a qual sua linha é a menos dominante diagonalmente.
- ▶ Quanto maior a rede, os métodos baseados na matriz Y se tornam menos competitivos em relação a outros métodos.

3.2 Métodos iterativos baseados na matriz Z

- ▶ A maior diferença entre os métodos baseados na matriz Y e os baseados na matriz Z é que a equação da rede é tratada em termos da matriz impedância:

$$E = Z \cdot I$$

- ▶ As correntes nodais são avaliadas por:

$$I_k = \left(\frac{S_k}{E_k} \right)^* \quad k = 1, \dots, n$$

e são substituídas em:

$$E_k = \sum_{m=1}^n Z_{km} I_m \quad k = 1, \dots, n$$

- ▶ Existem outras propostas com pequenas variações.

3.2.1 Avaliação dos métodos baseados na matriz Z

- ▶ A matriz Z é cheia (não esparsa).
- ▶ Normalmente a matriz Z é construída diretamente, e não através da inversão de Y .
Existem métodos de construção de Z (que envolvem grande esforço de cálculo).
- ▶ É necessário um grande espaço de memória para o armazenamento da matriz.
- ▶ Maior número de cálculos é necessário no processo iterativo.
- ▶ Para redes muito grandes, memória e volume de cálculos se tornam impráticos.
- ▶ Como cada tensão é avaliada em função de todas as correntes, a convergência é mais confiável e rápida, comparada com os métodos baseados na matriz Y .

- ▶ A escolha da barra de referência não é tão importante neste caso. Pode-se escolher a barra para a qual a soma dos elementos da linha da matriz Z é a maior.
- ▶ Em geral métodos baseados na matriz Z não são atrativos se comparados com os baseados na matriz Y .

3.3 Método iterativo de Newton

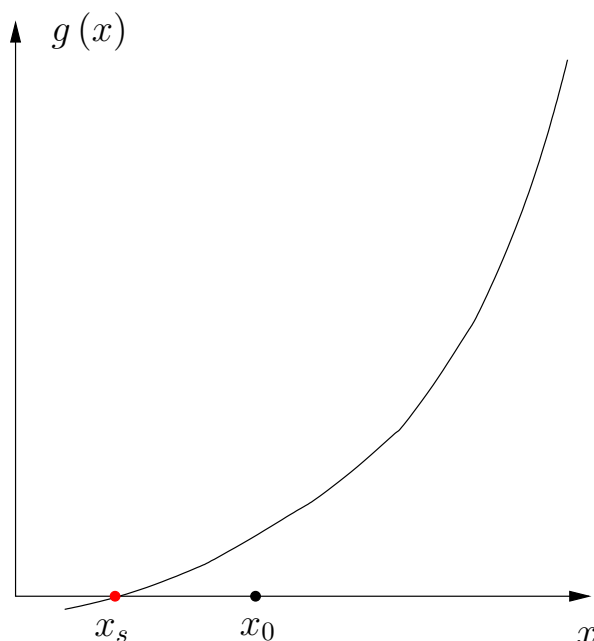
3.3.1 Resolução de sistemas algébricos pelo método de Newton

- ▶ Considerar a equação algébrica não-linear:

$$g(x) = 0$$

- ▶ Pretende-se determinar o valor de x para o qual a função $g(x)$ se anula.

Em termos geométricos a solução da equação acima corresponde ao ponto x_s em que a curva $g(x)$ corta o eixo horizontal x :



► Considerar que um ponto x_0 suficientemente próximo de x_s seja conhecido.

Neste caso, pode-se estimar a distância entre x_0 e x_s através da expansão da função $g(x)$ em torno de x_0 .

A expansão de $g(x)$ em série de Taylor desprezando os termos de ordem igual e superior a 2 resulta em:

$$\begin{aligned}g(x_0 + \Delta x) &= g(x_0) + \frac{d}{dx}g(x_0) \cdot \Delta x \\ &= g(x_0) + g'(x_0) \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Se Δx for considerado como sendo aproximadamente a distância entre x_0 e x_s :

$$\Delta x \approx x_s - x_0$$



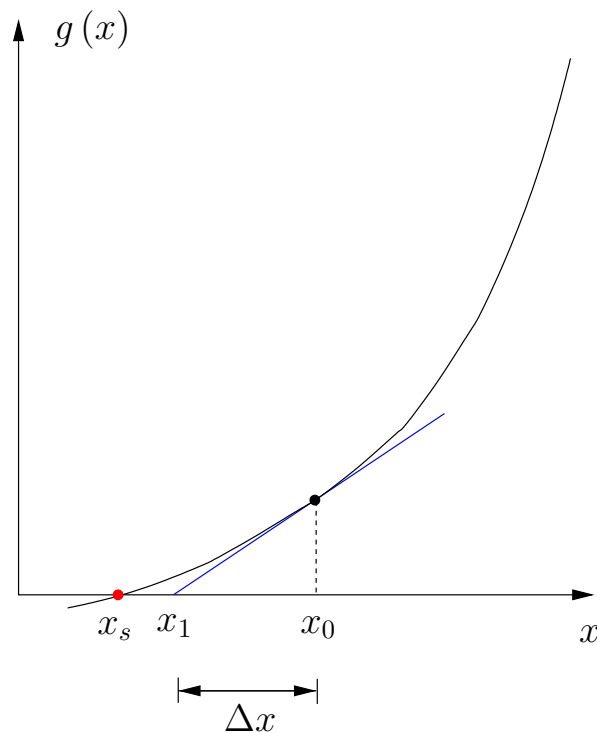
$$g(x_0 + \Delta x) \approx g(x_s) = 0$$

Logo:

$$g(x_0) + g'(x_0) \cdot \Delta x \approx 0$$

$$\Delta x \approx -\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

Interpretação gráfica:



Como o resultado é aproximado, então:

$$x_0 + \Delta x = x_1 \neq x_s$$

Porém, se x_0 está suficientemente próximo de x_s , então:

$$x_1 - x_s = \varepsilon$$

em que ε é muito pequeno.

- ▶ **A resolução do problema pelo método de Newton resulta em um processo iterativo baseado nas idéias apresentadas anteriormente.**

► **Processo iterativo:**

(1) Inicializar o contador de iterações $\nu = 0$.

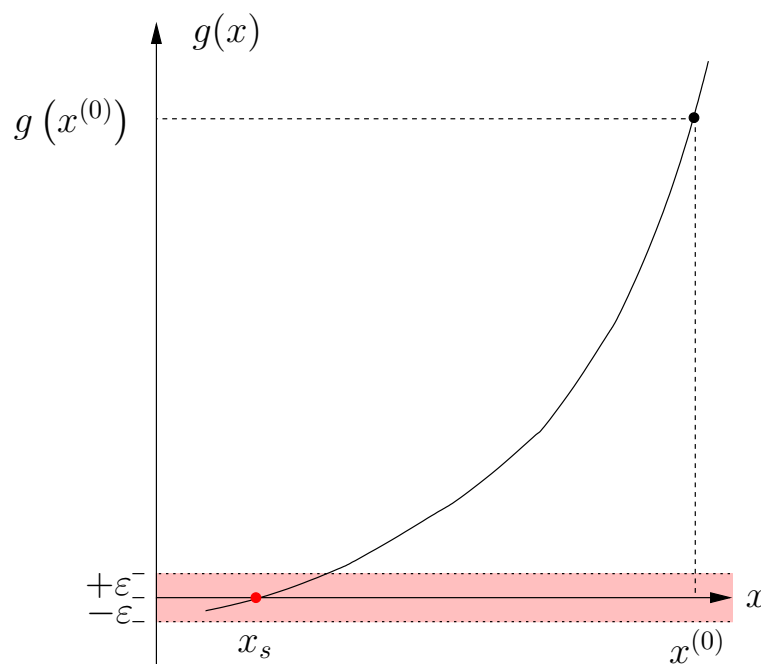
Escolher um ponto inicial $x = x^{(\nu)} = x^{(0)}$.

(2) Calcular o valor da função $g(x)$ no ponto $x = x^{(\nu)} \rightarrow g(x^{(\nu)})$.

(3) Comparar o valor calculado $g(x^{(\nu)})$ com uma tolerância especificada ε .

Se $|g(x^{(\nu)})| \leq \varepsilon$, então $x = x^{(\nu)}$ corresponderá à solução procurada dentro da faixa de tolerância $\pm\varepsilon$.

Caso contrário, prosseguir.



(4) Linearizar a função $g(x)$ em torno do ponto $(x^{(\nu)}, g(x^{(\nu)}))$ por intermédio da série de Taylor desprezando os termos de ordem igual e superior a 2:

$$\begin{aligned} g(x^{(\nu)} + \Delta x^{(\nu)}) &\approx g(x^{(\nu)}) + \frac{d}{dx}g(x^{(\nu)}) \cdot \Delta x^{(\nu)} \\ &\approx g(x^{(\nu)}) + g'(x^{(\nu)}) \cdot \Delta x^{(\nu)} \end{aligned}$$

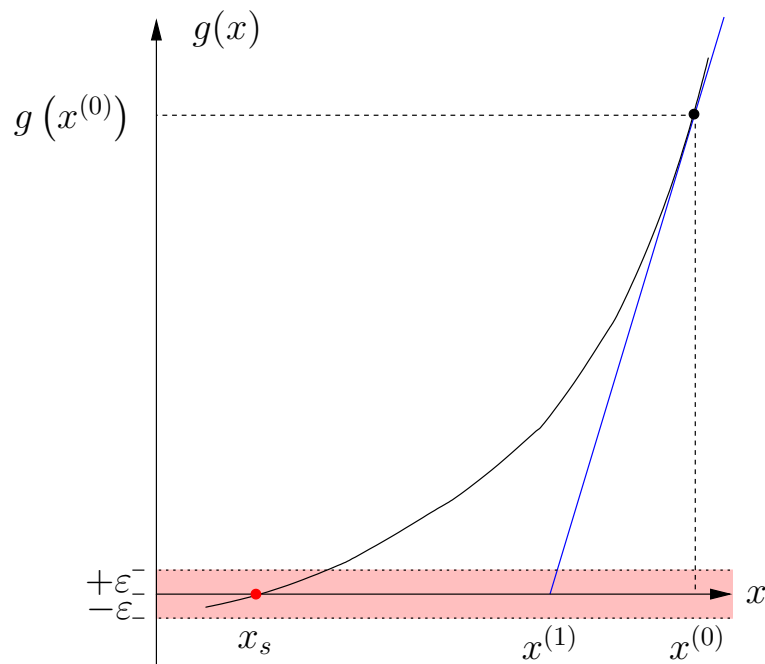
Este passo se resume de fato ao cálculo da derivada $g'(x^{(\nu)})$.

(5) Resolver o problema linearizado, ou seja, encontrar $\Delta x^{(\nu)}$ tal que:

$$g(x^{(\nu)}) + g'(x^{(\nu)}) \cdot \Delta x^{(\nu)} = 0$$
$$\Delta x^{(\nu)} = -\frac{g(x^{(\nu)})}{g'(x^{(\nu)})}$$

e o novo ponto:

$$x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} = \Delta x^{(\nu)}$$
$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + \Delta x^{(\nu)}$$
$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \frac{g(x^{(\nu)})}{g'(x^{(\nu)})}$$



De acordo com a figura:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{g(x^{(0)})}{g'(x^{(0)})}$$

Outra maneira simples de obter essa expressão é a seguinte (em última análise esta maneira tem o mesmo significado da linearização anterior):

- **Dado o ponto $x^{(0)}$, a derivada da curva de $g(x)$ calculada neste ponto é:**

$$\frac{d}{dx}g(x^{(0)}) = g'(x^{(0)}) = \alpha$$

que representa a declividade da reta tangente à função $g(x)$ no ponto $x^{(0)}$.

- **A equação da reta tangente à curva $g(x)$ e que passa por $x^{(0)}$ é:**

$$y = \alpha \cdot x + \beta$$

- **O valor de α é conhecido (derivada da curva). Deseja-se obter o ponto $x^{(1)}$ para o qual a reta corta o eixo x (e, portanto, $g(x^{(1)}) = 0$). O ponto $x^{(1)}$ é obtido a partir da idéia de que uma reta pode ser determinada a partir de dois pontos. Esses dois pontos serão $(x^{(1)}, g(x^{(1)}))$ e $(x^{(0)}, g(x^{(0)}))$:**

$$\begin{cases} 0 & = \alpha \cdot x^{(1)} + \beta \\ g(x^{(0)}) & = \alpha \cdot x^{(0)} + \beta \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

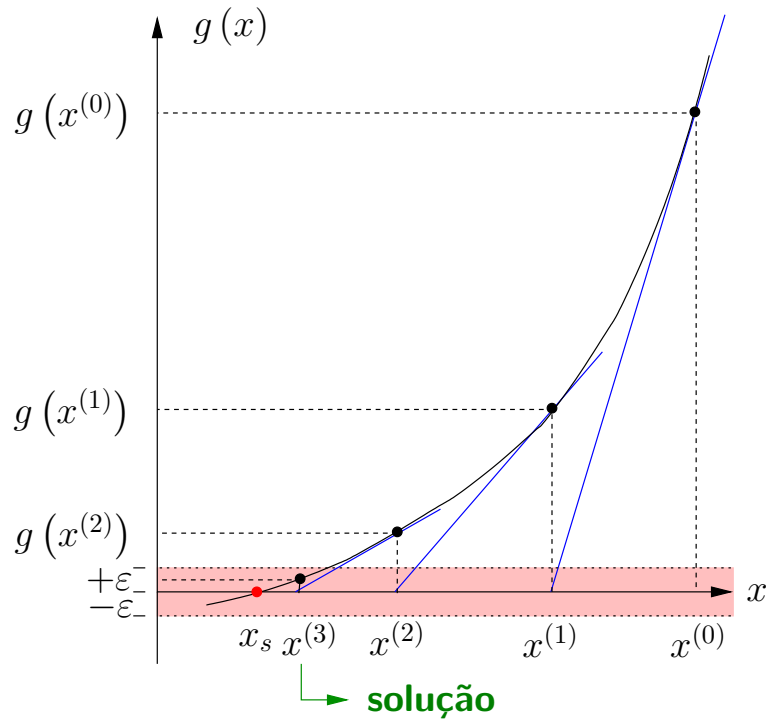
$$-g(x^{(0)}) = \alpha \cdot (x^{(1)} - x^{(0)})$$

e, finalmente:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{g(x^{(0)})}{g'(x^{(0)})}$$

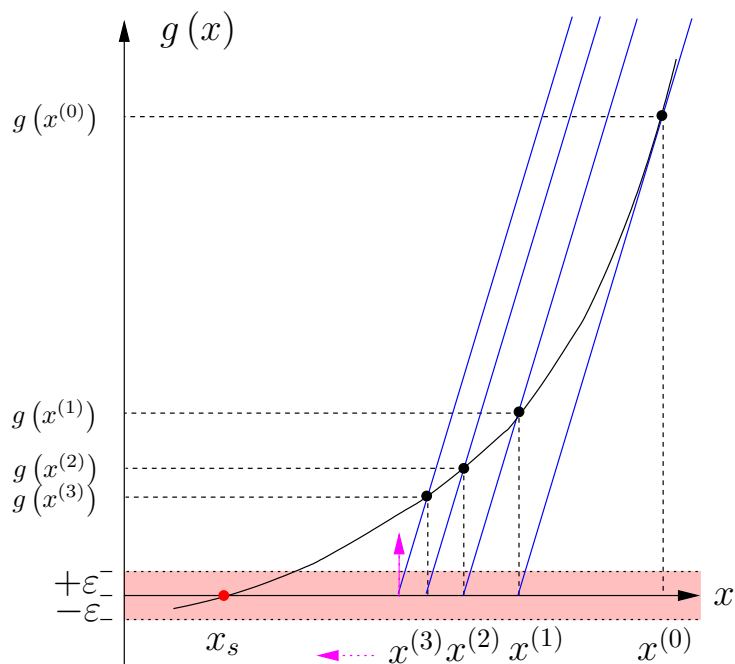
(6) Fazer $\nu \leftarrow \nu + 1$ e voltar para o passo (2).

► Desenvolvimento do processo iterativo:



→ De acordo com o critério predefinido (escolha de ε), $x^{(3)}$ está suficientemente próximo de x_s ($g(x^{(3)})$ dentro da faixa $\pm \varepsilon$) a ponto de poder ser considerado como a solução da equação $g(x) = 0$.

- ▶ Uma versão modificada do método acima é obtida considerando-se a derivada constante, ou seja, ela é calculada somente uma vez no ponto $x^{(0)}$ e utilizada em todas as iterações (Von Mises):



- O número de iterações é maior que no método original.
- Cada iteração é mais rápida (envolve menos cálculos) pois a derivada não precisa ser calculada a cada passo (esse fato ficará mais claro quando for tratado o caso multidimensional).

- ▶ Considerar agora o caso de um sistema n -dimensional de equações algébricas não-lineares:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

em que \mathbf{g} e \mathbf{x} são vetores de dimensão $(n \times 1)$ correspondentes respectivamente às funções e incógnitas:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) & g_2(\mathbf{x}) & \dots & g_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$

- ▶ Os passos do algoritmo de solução para o caso n -dimensional são basicamente os mesmos do caso unidimensional.

A diferença está no passo (4) em que se realiza a linearização de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

A linearização de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(\nu)}$ é dada por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(\nu)} + \Delta\mathbf{x}^{(\nu)}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(\nu)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(\nu)}) \cdot \Delta\mathbf{x}^{(\nu)}$$

sendo que \mathbf{J} é chamada de **matriz Jacobiana** e é dada por:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_n & \frac{\partial}{\partial x_2} g_n & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_n \end{bmatrix}$$

O vetor de correção $\Delta\mathbf{x}$ é calculado impondo-se:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(\nu)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(\nu)}) \cdot \Delta\mathbf{x}^{(\nu)} = \mathbf{0}$$



$$\Delta\mathbf{x}^{(\nu)} = - \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(\nu)}) \right]^{-1} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(\nu)})$$

► **Caso particular para $n = 2$:**

$$g_1 [(x_1 + \Delta x_1), (x_2 + \Delta x_2)] \approx g_1 (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) + \left. \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 \right|_{(\nu)} \cdot \Delta x_1^{(\nu)} + \left. \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 \right|_{(\nu)} \cdot \Delta x_2^{(\nu)}$$

$$g_2 [(x_1 + \Delta x_1), (x_2 + \Delta x_2)] \approx g_2 (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) + \left. \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 \right|_{(\nu)} \cdot \Delta x_1^{(\nu)} + \left. \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 \right|_{(\nu)} \cdot \Delta x_2^{(\nu)}$$

► **Algoritmo para resolução do sistema de equações $g(x) = 0$ pelo método de Newton:**

(1) Inicializar o contador de iterações $\nu = 0$.

Escolher um ponto inicial $x = x^{(\nu)} = x^{(0)}$.

(2) Calcular o valor da função $g(x)$ no ponto $x = x^{(\nu)} \rightarrow g(x^{(\nu)})$.

(3) Teste de convergência:

Se $|g_i(x^{(\nu)})| \leq \varepsilon$ para $i = 1 \dots n$, então $x = x^{(\nu)}$ será a solução procurada dentro da faixa de tolerância $\pm \varepsilon$ e o processo convergiu.

Caso contrário, prosseguir.

(4) Calcular a matriz Jacobiana $J(x^{(\nu)})$.

(5) Determinar o novo ponto $x^{(\nu+1)}$:

$$\Delta x^{(\nu)} = - [J(x^{(\nu)})]^{-1} \cdot g(x^{(\nu)})$$
$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + \Delta x^{(\nu)}$$

(6) Fazer $\nu \leftarrow \nu + 1$ e voltar para o passo (2).

3.3.2 Avaliação do método de Newton

- ▶ Converte para vários casos em que outros métodos (p.ex. Gauss-Seidel) divergem → é mais confiável.
- ▶ O número de iterações necessárias para a convergência independe da dimensão do problema (ao contrário de Gauss-Seidel, que aumenta de um fator n – em que n é a dimensão do problema).
- ▶ Requer mais espaço de memória para armazenamento, devido à matriz Jacobiana.
- ▶ O tempo computacional por iteração é maior, pois deve-se inverter a matriz Jacobiana e multiplicá-la por um vetor.
- ▶ As técnicas de armazenamento compacto e de fatoração reduziram de maneira significativa o espaço de memória necessário e o esforço computacional.
- ▶ Apresenta convergência quadrática, ou seja, se:

$$\begin{cases} \underline{x}_s & \text{– solução exata do problema} \\ \underline{x}^i & \text{– solução para a iteração } i \\ \underline{E}^i = \underline{x}^i - \underline{x}_s & \text{– erro na iteração } i \end{cases}$$

define-se:

$$e^i = \|E^i\|_2 = \sqrt{(E^i)^T \cdot E^i}$$

e pode-se mostrar que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e^{i+1}}{(e^i)^2} = K$$

em que K é a constante assintótica de proporcionalidade. Para i suficientemente grande, pode-se dizer que:

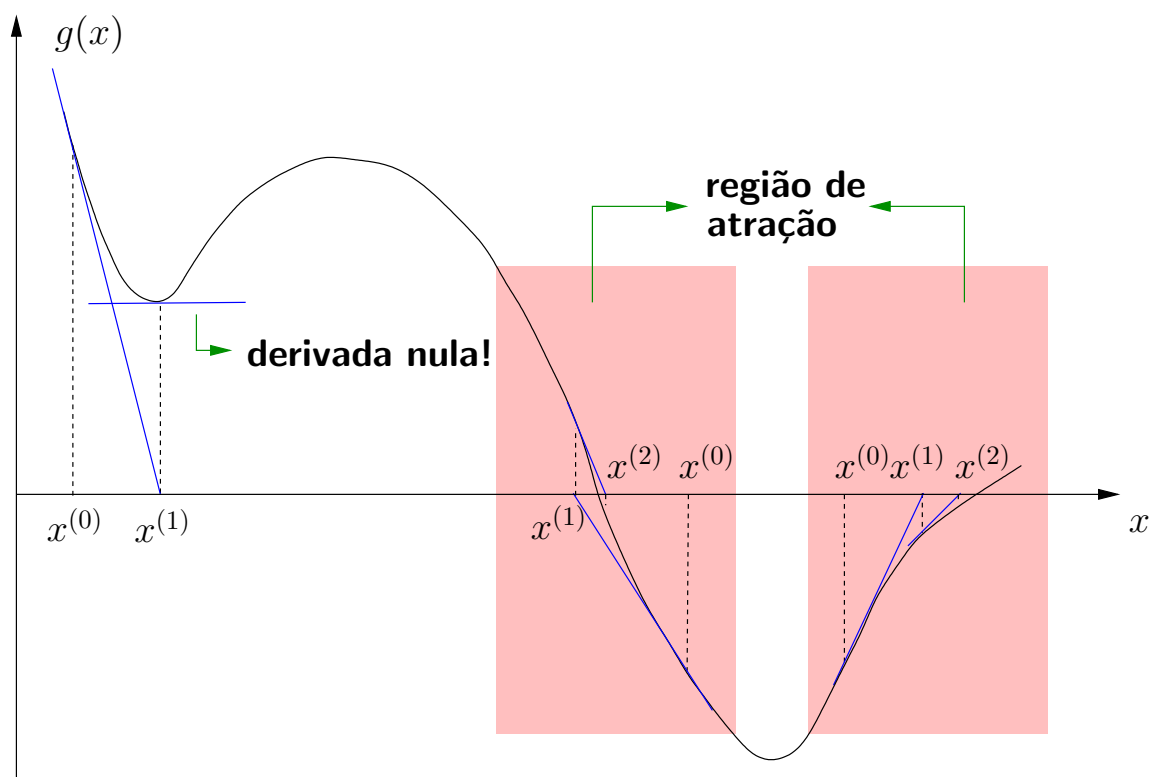
$$e^{i+1} \approx K \cdot (e^i)^2$$

o que garante uma convergência rápida, principalmente se o ponto inicial escolhido já está próximo da solução exata.

▶ Não é sensível à escolha da barra de referência.

▶ É sensível à escolha do ponto inicial.

▶ Situações:



- região de atração.
- soluções múltiplas.
- pontos de mínimo.
- mal condicionamento.

O método de Newton e suas versões (métodos desacoplados) são os mais usados na prática e serão apresentados com detalhe adiante