Capítulo 6
Fluxo de carga linearizado

6.1 Introdução

- **Em capítulos anteriores foi feita a consideração de que o fluxo de potência ativa em um ramo pode ser aproximado por:**

$$\begin{aligned} P_{km} &\approx k_1 \cdot \theta_{km} \\ &\approx \frac{1}{x_{km}} \cdot (\theta_k - \theta_m) \end{aligned}$$

- **O fluxo de potência ativa em um ramo:**
  - **é aproximadamente proporcional à abertura angular da linha (θ_{km}).**
  - **desloca-se no sentido dos ângulos maiores para os ângulos menores ($P_{km} > 0$ se $\theta_k > \theta_m$).**

- **Esses fatores motivaram o desenvolvimento do fluxo de carga linearizado ou fluxo de carga c.c.).**

- **A distribuição dos fluxos de potência ativa pelos ramos de uma rede pode ser estimada a um baixo custo computacional com precisão aceitável para uma série de aplicações (desde o planejamento até a operação).**

- O fluxo de carga c.c. é baseado no acoplamento das variáveis P e θ (potência ativa/ângulo).

  Este acoplamento é tanto maior quanto maiores forem os níveis de tensão da rede.

  Para redes de distribuição (baixa tensão) esse acoplamento é mais fraco (os fluxos de potência ativa dependem significativamente das magnitudes das tensões).

- O fluxo de carga linearizado pode ser útil:

  - em etapas preliminares de estudos de planejamento da expansão de redes elétricas;
  - na classificação de cenários de operação com relação a violações de limites operacionais (análise de segurança).

- O fluxo de carga c.c. não substitui o fluxo de carga c.a.

6.2 Linearização

6.2.1 Linhas de transmissão

- Os fluxos de potência ativa em uma linha de transmissão que conecta as barras k e m são:

$$\begin{cases} P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m \left(g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} \right) \\ P_{mk} = V_m^2 g_{km} - V_k V_m \left(g_{km} \cos \theta_{km} - b_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} \right) \end{cases}$$

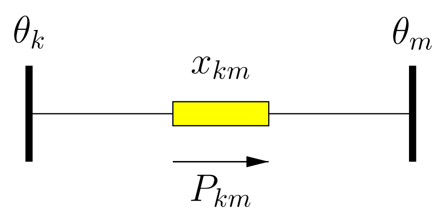
- **Considere as seguintes aproximações:**

$$
\begin{array}{lcl}
V_k \approx V_m \approx 1 \text{ **pu**} & & \\
\theta_{km} \text{ **pequeno**} & \rightsquigarrow & \operatorname{sen}\theta_{km} \approx \theta_{km} \\
 & & \cos\theta_{km} \approx 1 \\
r_{km} \ll x_{km} & \rightsquigarrow & b_{km} \approx -\frac{1}{x_{km}} \\
 & & g_{km} \approx 0
\end{array}
$$

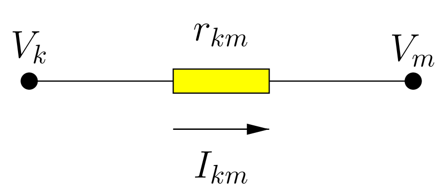
- **Os fluxos de potência aproximados ficam:**

$$P_{km} = -P_{mk} = x_{km}^{-1}\theta_{km} = \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}}$$

- **Analogia com a lei de Ohm:**



$$P_{km} = (\theta_k - \theta_m)/x_{km}$$



$$I_{km} = (V_k - V_m)/r_{km}$$

Fluxo de potência c.c.		**Circuito c.c.**
x_{km}	$\Longleftrightarrow$	r_{km}
P_{km}	$\Longleftrightarrow$	I_{km}
$\theta_{km} = (\theta_k - \theta_m)$	$\Longleftrightarrow$	$V_{km} = (V_k - V_m)$

6.2.2 Transformador em fase

▶ **Fluxos de potência ativa em um transformador em fase:**

$$\begin{cases} P_{km} &= (a_{km}V_k)^2\, g_{km} - (a_{km}V_k)\, V_m\, (g_{km}\cos\theta_{km} + b_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km}) \\ P_{mk} &= V_m^2 g_{km} - (a_{km}V_k)\, V_m\, (g_{km}\cos\theta_{km} - b_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km}) \end{cases}$$

▶ **Considerando as mesmas aproximações adotadas para a linha de transmissão e ainda que o tap esteja na posição nominal ($a_{km} \approx 1$):**

$$P_{km} = -P_{mk} = x_{km}^{-1}\theta_{km}$$

que é idêntica à expressão obtida para a linha de transmissão.

6.2.3 Transformador defasador

▶ **Fluxos de potência ativa em um transformador defasador puro:**

$$\begin{cases} P_{km} &= V_k^2 g_{km} - V_k V_m\, [g_{km}\cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + b_{km}\,\text{sen}\,(\theta_{km} + \varphi_{km})] \\ P_{mk} &= V_m^2 g_{km} - V_k V_m\, [g_{km}\cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - b_{km}\,\text{sen}\,(\theta_{km} + \varphi_{km})] \end{cases}$$

▶ **Considerando as mesmas aproximações adotadas para a linha de transmissão:**

$$P_{km} = -P_{mk} = x_{km}^{-1}\,(\theta_{km} + \varphi_{km})$$

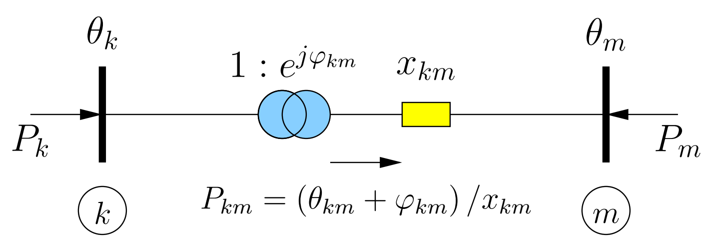
- **A expressão do fluxo de potência pode ser reescrita como:**

$$P_{km} = \underbrace{x_{km}^{-1}\theta_{km}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{x_{km}^{-1}\varphi_{km}}_{\mathrm{II}}$$

I **depende do estado dos nós terminais do transformador (idêntico aos fluxos de potência ativa pelas linhas de transmissão e transformadores em fase)**

II **depende da posição do tap do transformador**

- **Considere um transformador defasador puro operando nas condições mostradas a seguir:**



- **Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff aos nós k e m tem-se:**

$$\begin{aligned} P_k = P_{km} &= \frac{1}{x_{km}}(\theta_{km} + \varphi_{km}) = \frac{1}{x_{km}}\theta_{km} + \frac{1}{x_{km}}\varphi_{km} \\ P_m = -P_{km} &= -\frac{1}{x_{km}}(\theta_{km} + \varphi_{km}) = -\frac{1}{x_{km}}\theta_{km} - \frac{1}{x_{km}}\varphi_{km} \end{aligned} \qquad (1)$$

- **O termo $x_{km}^{-1}\theta_{km}$ da expressão do fluxo de potência é idêntico aos fluxos de potência em linhas de transmissão e transformadores em fase, e depende do estado da rede (ângulos de fase).**

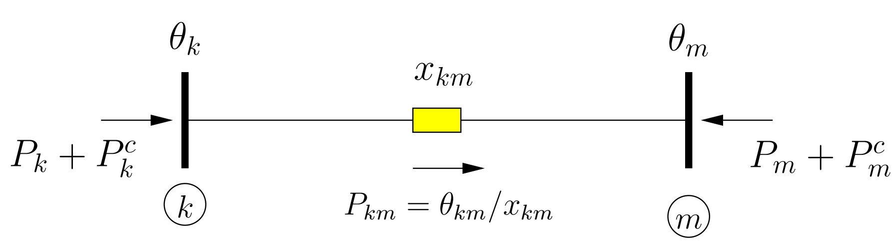
▶ O termo $x_{km}^{-1}\varphi_{km}$ da expressão do fluxo de potência não depende do estado da rede (ângulos de fase).

Considerando que a posição do tap permaneça constante, este termo é constante.

No caso de transformadores com ajuste automático da posição do tap, considera-se o valor nominal ou um valor básico.

Idéia	Eliminar o termo $x_{km}^{-1}\varphi_{km}$ (constante) da expressão do fluxo de potência.
Conseqüência	A expressão do fluxo de potência do transformador defasador ficará idêntica às expressões para linhas de transmissão e transformadores em fase.
Realização	Incluir injeções de compensação nas barras k e m (P_k^c e P_m^c) de forma que elas levem em conta o termo constante que foi eliminado anteriormente e que as leis de Kirchhoff continuem a ser atendidas.

▶ Considere que o transformador defasador puro possa ser representado por:



▶ Se as injeções de compensação forem corretamente determinadas, o estado da rede (ângulos das barras) será o mesmo em ambas as situações.

▶ **Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff para os nós k e m na nova situação:**

$$P_k + P_k^c = P_{km} = \frac{1}{x_{km}}\theta_{km}$$
$$P_m + P_m^c = -P_{km} = -\frac{1}{x_{km}}\theta_{km}$$

ou:

$$P_k = \frac{1}{x_{km}}\theta_{km} - P_k^c$$
$$P_m = -\frac{1}{x_{km}}\theta_{km} - P_m^c \tag{2}$$

▶ **Para que os estados da rede sejam os mesmos em ambas as situações, as injeções de compensação devem ser tais que as injeções líquidas nas barras sejam as mesmas.**

▶ **Igualando P_k e P_m das equações (1) e (2):**

$$\frac{1}{x_{km}}\theta_{km} + \frac{1}{x_{km}}\varphi_{km} = \frac{1}{x_{km}}\theta_{km} - P_k^c$$
$$-\frac{1}{x_{km}}\theta_{km} - \frac{1}{x_{km}}\varphi_{km} = -\frac{1}{x_{km}}\theta_{km} - P_m^c$$

que resulta em:

$$\boxed{P_k^c = -P_m^c = -\frac{1}{x_{km}}\varphi_{km}}$$

- **Se φ_{km} for positivo, a inserção das injeções de compensação equivale a conectar uma carga adicional na barra k ($P_k^c < 0$) e uma geração adicional na barra m ($P_m^c > 0$).**

  Se φ_{km} for negativo, a inserção das injeções de compensação equivale a conectar uma geração adicional na barra k ($P_k^c > 0$) e uma carga adicional na barra m ($P_m^c < 0$).

  Essas observações são válidas para o modelo do transformador defasador que foi adotado, ou seja, $\left(1 : e^{j\varphi_{km}}\right)$ conectado à barra k.

6.3 Formulação matricial

- **Considere uma rede de NB barras sem transformadores defasadores. O fluxo de potência em um ramo que conecta as barras k e m é dado por:**

$$P_{km} = x_{km}^{-1} \theta_{km}$$

- **A aplicação da lei das correntes de Kirchhoff para um nó k da rede resulta em:**

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km} = \sum_{m \in \Omega_k} \left(x_{km}^{-1} \theta_{km}\right)$$

Da equação acima:

$$
\begin{aligned}
P_k &= \sum_{m \in \Omega_k} \left(x_{km}^{-1} \theta_{km} \right) \\
&= \sum_{m \in \Omega_k} \left[x_{km}^{-1} \left(\theta_k - \theta_m \right) \right] \\
&= \sum_{m \in \Omega_k} \left(x_{km}^{-1} \theta_k - x_{km}^{-1} \theta_m \right) \\
&= \sum_{m \in \Omega_k} \left(x_{km}^{-1} \theta_k \right) + \sum_{m \in \Omega_k} \left(-x_{km}^{-1} \theta_m \right) \\
&= \left(\sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \right) \theta_k + \sum_{m \in \Omega_k} \left(-x_{km}^{-1} \theta_m \right)
\end{aligned}
$$

► **Considerando todas as barras da rede, tem-se o seguinte sistema de equações:**

$$
P_k = \left(\sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \right) \theta_k + \sum_{m \in \Omega_k} \left(-x_{km}^{-1} \theta_m \right) \qquad k = 1, \ldots, \mathrm{NB}
$$

► **O sistema de equações referente às potências nodais pode ser colocado na forma matricial:**

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{B}' \cdot \boldsymbol{\theta}$$

em que:

$\boldsymbol{\theta}$ **vetor dos ângulos de fase das tensões nodais (dimensão** $[\mathrm{NB} \times 1]$**)**

$\boldsymbol{P}$ **vetor das injeções nodais líquidas de potência ativa (dimensão** $[\mathrm{NB} \times 1]$**)**

B' **matriz do tipo admitância nodal (dimensão** $[\mathrm{NB} \times \mathrm{NB}]$**) cujos elementos são:**

$$\begin{cases} B'_{kk} & = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \\ B'_{km} & = -x_{km}^{-1} \\ B'_{mk} & = -x_{km}^{-1} \end{cases}$$

► **A matriz** B' **é singular, pois:**

$$B'_{kk} = -\sum_{m \in \Omega_k} B'_{km}$$

► **Deve-se adotar uma das barras da rede como referência angular. Esta barra terá seu ângulo de fase conhecido (normalmente igual a** 0**).**

O sistema passa a ter $(\mathrm{NB} - 1)$ **incógnitas e** $(\mathrm{NB} - 1)$ **equações.**

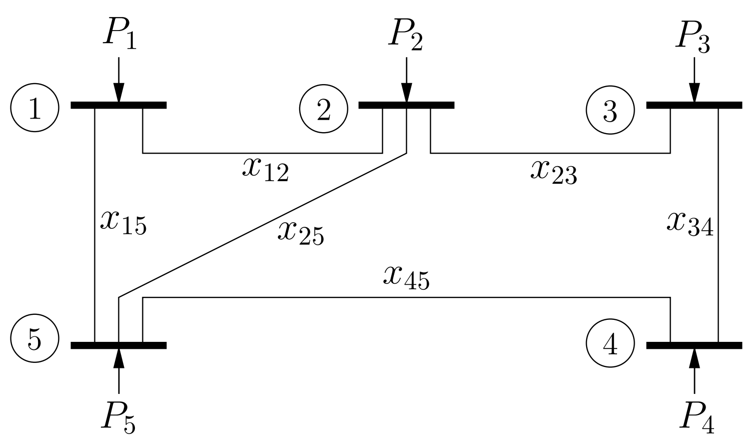
A matriz B' **terá dimensão** $[\,(\mathrm{NB} - 1) \times (\mathrm{NB} - 1)\,]$**.**

A equação de injeção de potência ativa referente à barra de referência é eliminada e o valor da injeção é determinado através da aplicação da lei das correntes de Kirchhoff após o estado da rede (vetor θ) ter sido obtido.

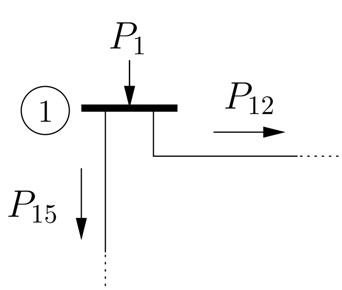
Pode-se também utilizar a técnica já apresentada de se colocar um número muito grande na posição da diagonal da matriz B' correspondente à barra de referência e a matriz continuará a ter dimensão $[\mathrm{NB} \times \mathrm{NB}]$.

■ Exemplo

Obtenha o sistema de equações de fluxo de carga linearizado para a rede mostrada a seguir, considerando a barra 5 como referência angular.



Inicialmente deve-se aplicar a lei das correntes de Kirchhoff para todas as barras da rede, como por exemplo:



Resultando em:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_{12} + P_{15} \\
P_2 &= P_{21} + P_{23} + P_{25} \\
P_3 &= P_{32} + P_{34} \\
P_4 &= P_{43} + P_{45} \\
P_5 &= P_{51} + P_{52} + P_{54}
\end{aligned}$$

Utilizando:

$$P_{km} = x_{km}^{-1} \left(\theta_k - \theta_m\right) = b_{km} \left(\theta_k - \theta_m\right)$$

para os fluxos nos ramos e rearranjando os termos, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
P_1 &= (b_{12} + b_{15}) \cdot \theta_1 + (-b_{12}) \cdot \theta_2 + (-b_{15}) \cdot \theta_5 \\
P_2 &= (-b_{12}) \cdot \theta_1 + (b_{12} + b_{23} + b_{25}) \cdot \theta_2 + (-b_{23}) \cdot \theta_3 + (-b_{25}) \cdot \theta_5 \\
P_3 &= (-b_{23}) \cdot \theta_2 + (b_{23} + b_{34}) \cdot \theta_3 + (-b_{34}) \cdot \theta_4 \\
P_4 &= (-b_{34}) \cdot \theta_3 + (b_{34} + b_{45}) \cdot \theta_4 + (-b_{45}) \cdot \theta_5 \\
P_5 &= (-b_{15}) \cdot \theta_1 + (-b_{25}) \cdot \theta_2 + (-b_{45}) \cdot \theta_4 + (b_{15} + b_{25} + b_{45}) \cdot \theta_5
\end{aligned}$$

Colocando o sistema de equações na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_{12} + b_{15}) & -b_{12} & 0 & 0 & -b_{15} \\ -b_{12} & (b_{12} + b_{23} + b_{25}) & -b_{23} & 0 & -b_{25} \\ 0 & -b_{23} & (b_{23} + b_{34}) & -b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{34} & (b_{34} + b_{45}) & -b_{45} \\ -b_{15} & -b_{25} & 0 & -b_{45} & (b_{15} + b_{25} + b_{45}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}$$

ou, em uma forma compacta:

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{B}' \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Os ângulos de fase das barras devem obtidos através de:

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\mathrm{B}'\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{P}$$

No entanto, verifica-se que não é possível obter a inversa de B', pois ela é singular.

Deve-se atribuir a uma das barras a função de referência angular, como por exemplo a barra 5 (conforme o enunciado do problema). Assim, o ângulo de fase da barra 5 torna-se conhecido, não sendo mais uma incógnita do problema.

Deve-se também retirar a equação correspondente à barra 5 do sistema de equações para que o número de equações seja igual ao número de incógnitas. Tem-se então o novo sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12}+b_{15} & -b_{12} & 0 & 0 \\ -b_{12} & b_{12}+b_{23}+b_{25} & -b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{23} & b_{23}+b_{34} & -b_{34} \\ 0 & 0 & -b_{34} & b_{34}+b_{45} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

A nova matriz B' agora possui inversa e os ângulos podem ser calculados.

A adoção de uma barra de referência também permite que na barra de referência ocorra o balanço de potência. Neste caso:

$$P_5 = -\left(P_1 + P_2 + P_3 + P_4\right) \tag{3}$$

ou:

$$P_5 = P_{51} + P_{52} + P_{54} \tag{4}$$

A equação (3) é válida para este exemplo pois não há perdas de potência ativa na transmissão (ramos têm resistências desprezíveis). A equação (4) é sempre válida. O procedimento para consideração das perdas de transmissão será mostrado adiante.

Do ponto de vista computacional muitas vezes não é conveniente mudar as dimensões da matriz B'.

Pode-se utilizar a técnica já apresentada que mantém a dimensão original da matriz considerando a barra de referência de maneira adequada. Basta inserir na posição da diagonal da matriz correspondente à barra de referência um número muito grande (tendendo a ∞):

$$\mathbf{B'} = \begin{bmatrix} b_{12}+b_{15} & -b_{12} & 0 & 0 & -b_{15} \\ -b_{12} & b_{12}+b_{23}+b_{25} & -b_{23} & 0 & -b_{25} \\ 0 & -b_{23} & b_{23}+b_{34} & -b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{34} & b_{34}+b_{45} & -b_{45} \\ -b_{15} & -b_{25} & 0 & -b_{45} & \infty \end{bmatrix}$$

Esta nova matriz não é singular. Sua inversão resulta em:

$$\mathbf{B'}^{-1} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é equivalente à retirada da equação de $P_5 \rightsquigarrow$ o ângulo θ_5 é calculado igual a zero e P_5 não influi no cálculo dos demais ângulos de fase nodais.

■

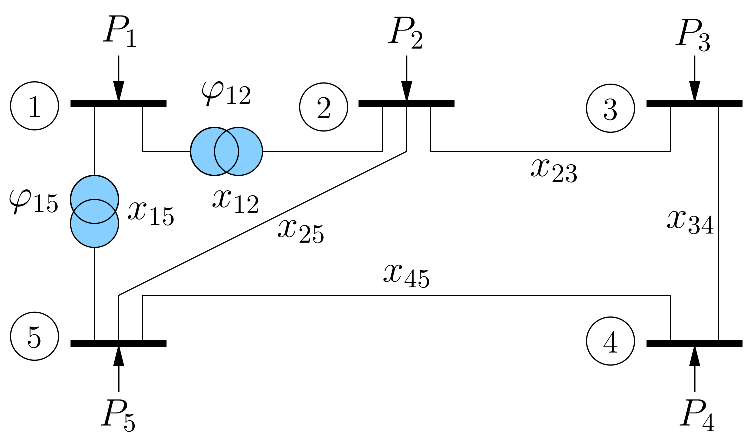
▶ **De acordo com o modelo adotado, linhas de transmissão, transformadores em fase e transformadores defasadores são modelados como reatâncias entre duas barras.**

Do ponto de vista da matriz B' não há diferença entre os três equipamentos.

Se houver transformadores defasadores, deve-se incluir as injeções de compensação no sistema de equações.

■ Exemplo

Voltando à rede exemplo de 5 barras e 6 ramos, obtenha o sistema de equações de fluxo de carga linearizado, considerando que as linhas de transmissão (1-2) e (1-5) sejam substituídas por transformadores defasadores puros com mesmas reatâncias e ângulos de defasagem respectivamente iguais a φ_{12} e φ_{15}.



Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff para todas as barras da rede:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_{12} + P_{15} \\
P_2 &= P_{21} + P_{23} + P_{25} \\
P_3 &= P_{32} + P_{34} \\
P_4 &= P_{43} + P_{45} \\
P_5 &= P_{51} + P_{52} + P_{54}
\end{aligned}
$$

em que, agora:

$$P_{12} = -P_{21} = b_{12} \cdot (\theta_1 - \theta_2 + \varphi_{12})$$
$$P_{15} = -P_{51} = b_{15} \cdot (\theta_1 - \theta_5 + \varphi_{15})$$

Utilizando a expressão $P_{km} = x_{km}^{-1}(\theta_k - \theta_m) = b_{km}(\theta_k - \theta_m)$ **para os fluxos nos demais ramos, considerando os termos relativos aos ângulos de defasagem como injeções de potência e rearranjando os termos, obtém-se o seguinte sistema de equações:**

$$\begin{aligned}
P_1 - b_{12}\varphi_{12} - b_{15}\varphi_{15} &= (b_{12} + b_{15}) \cdot \theta_1 + (-b_{12}) \cdot \theta_2 + (-b_{15}) \cdot \theta_5 \\
P_2 + b_{12}\varphi_{12} &= (-b_{12}) \cdot \theta_1 + (b_{12} + b_{23} + b_{25}) \cdot \theta_2 + (-b_{23}) \cdot \theta_3 + (-b_{25}) \cdot \theta_5 \\
P_3 &= (-b_{23}) \cdot \theta_2 + (b_{23} + b_{34}) \cdot \theta_3 + (-b_{34}) \cdot \theta_4 \\
P_4 &= (-b_{34}) \cdot \theta_3 + (b_{34} + b_{45}) \cdot \theta_4 + (-b_{45}) \cdot \theta_5 \\
P_5 + b_{15}\varphi_{15} &= (-b_{15}) \cdot \theta_1 + (-b_{25}) \cdot \theta_2 + (-b_{45}) \cdot \theta_4 + (b_{15} + b_{25} + b_{45}) \cdot \theta_5
\end{aligned}$$

Colocando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{12}\varphi_{12} - b_{15}\varphi_{15} \\ b_{12}\varphi_{12} \\ 0 \\ 0 \\ b_{15}\varphi_{15} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (b_{12}+b_{15}) & -b_{12} & 0 & 0 & -b_{15} \\ -b_{12} & (b_{12}+b_{23}+b_{25}) & -b_{23} & 0 & -b_{25} \\ 0 & -b_{23} & (b_{23}+b_{34}) & -b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{34} & (b_{34}+b_{45}) & -b_{45} \\ -b_{15} & -b_{25} & 0 & -b_{45} & (b_{15}+b_{25}+b_{45}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}$$

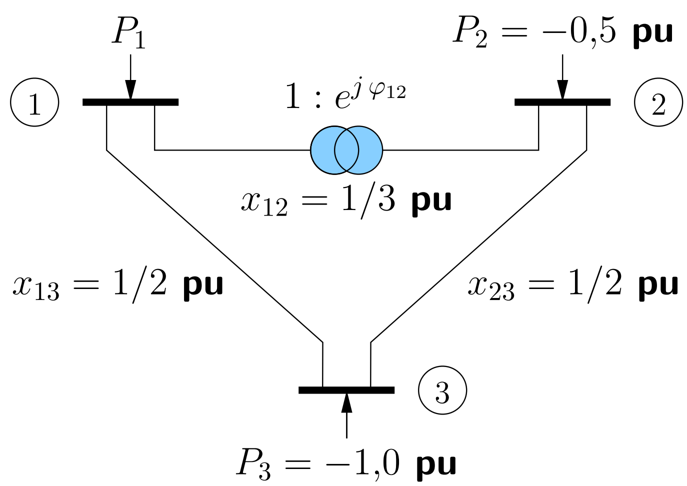
ou, em uma forma compacta:

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^c = \mathrm{B}' \cdot \boldsymbol{\theta}$$

■

■ Exemplo

Considere a rede de 3 barras e 3 ramos a seguir. A barra 1 é escolhida como referência angular ($\theta_1 = 0$).



Considere inicialmente que o tap do transformador defasador que conecta as barras 1 e 2 esteja na posição nominal, ou seja, $\varphi_{12} = 0$. Pode-se obter os ângulos de fase nodais a partir de:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ -0{,}5 \\ -1{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & -3{,}0 & -2{,}0 \\ -3{,}0 & 5{,}0 & -2{,}0 \\ -2{,}0 & -2{,}0 & 4{,}0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

que resulta em:

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\ 0 \quad -0{,}250 \quad -0{,}375\ \right]^T \ \textbf{rad}$$

Os fluxos nos ramos são:

$$\begin{aligned} P_{12} &= x_{12}^{-1} \cdot \theta_{12} = 0{,}75 \ \textbf{pu} \\ P_{13} &= x_{13}^{-1} \cdot \theta_{13} = 0{,}75 \ \textbf{pu} \\ P_{23} &= x_{23}^{-1} \cdot \theta_{23} = 0{,}25 \ \textbf{pu} \end{aligned}$$

Para $\varphi_{12} = -0{,}1$ **radianos o vetor das injeções de compensação fica:**

$$\boldsymbol{P}^c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_{12}} \cdot \varphi_{12} \\ \frac{1}{x_{12}} \cdot \varphi_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} \ \textbf{pu}$$

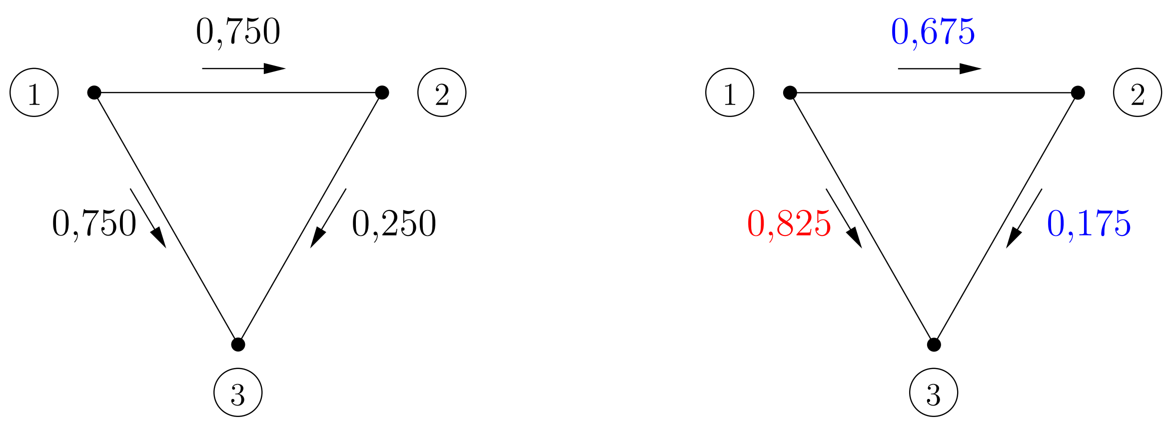
Os ângulos de fase nodais são calculados por:

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{B'})^{-1} \cdot (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^c) = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ -0{,}3250 \\ -0{,}4125 \end{bmatrix} \ \textbf{rad}$$

Os fluxos nos ramos agora são:

$$\begin{aligned} P_{12} &= x_{12}^{-1} \cdot (\theta_{12} + \varphi_{12}) = 0{,}675 \ \textbf{pu} \\ P_{13} &= x_{13}^{-1} \cdot \theta_{13} = 0{,}825 \ \textbf{pu} \\ P_{23} &= x_{23}^{-1} \cdot \theta_{23} = 0{,}175 \ \textbf{pu} \end{aligned}$$

O ajuste da posição do tap em $\varphi_{12} = -0{,}1$ radianos resultou em um alívio de carga no ramo 1-2. Em consequência, o carregamento do ramo 1-3 aumentou:



$\varphi_{12} = 0$ $\qquad\qquad$ $\varphi_{12} = -0{,}1$

6.4 Modelo c.c.

- **O modelo de fluxo de carga linearizado é tal que existe a seguinte analogia entre a rede e um circuito c.c.:**

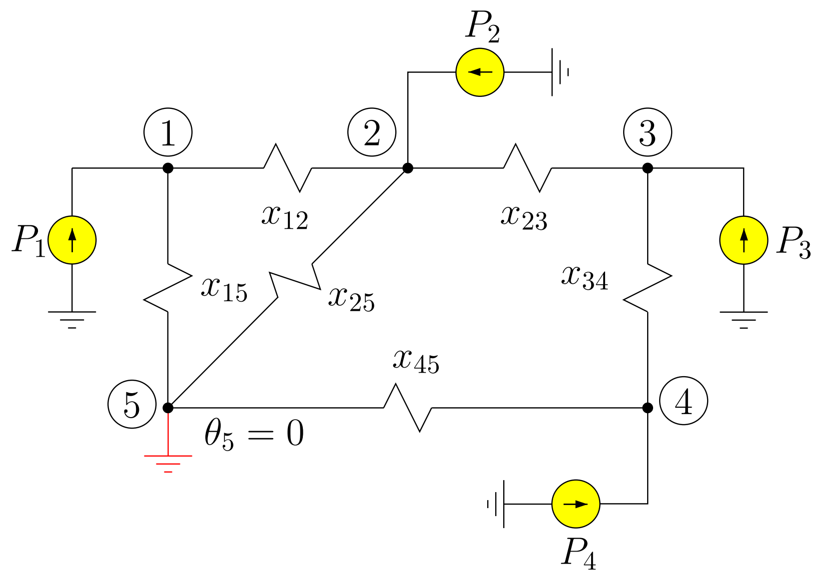
$$\boldsymbol{P} = \mathrm{B}' \cdot \boldsymbol{\theta}$$

$$\Updownarrow$$

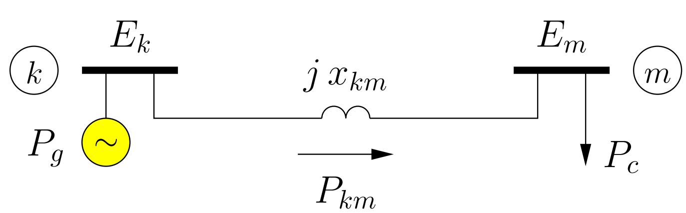
$$\boldsymbol{I} = \mathrm{G} \cdot \boldsymbol{V}$$

Fluxo de carga linearizado		Circuito c.c.
$\boldsymbol{P}$	$\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{\theta}$	$\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{V}$
B'	$\longleftrightarrow$	G
x_{km}	$\longleftrightarrow$	r_{km}

▶ **O modelo c.c. correspondente à rede exemplo de 5 barras e 6 ramos mostrada anteriormente é:**



▶ **Considere a rede de 2 barras conectadas por uma linha de transmissão mostrada a seguir.**



Considere que:

- **as magnitudes das tensões nodais são iguais a 1 pu** ($V_k = V_m = 1$ **pu)**
- **a linha não consome potência ativa** ($r_{km} = 0$)**, logo,** $P_g = P_c = P_{km}$

A corrente pela linha é dada por:

$$I_{km} = \frac{1}{jx_{km}} (E_k - E_m)$$

O fluxo de potência complexa é:

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= E_k^* I_{km} \\ &= E_k^* \cdot \frac{1}{jx_{km}} (E_k - E_m) \\ &= \frac{1}{jx_{km}} \mid E_k \mid^2 - \frac{1}{jx_{km}} E_k^* E_m \end{aligned}$$

Considerando $V_k = V_m = 1$ **pu tem-se:**

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= -j\frac{1}{x_{km}} + j\frac{1}{x_{km}} e^{-j(\theta_k - \theta_m)} \\ &= -j\frac{1}{x_{km}} + j\frac{1}{x_{km}} [\cos(\theta_k - \theta_m) - j\,\mathrm{sen}\,(\theta_k - \theta_m)] \end{aligned}$$

O fluxo de potência ativa no ramo k-m **(modelo c.a.) é igual a:**

$$P_{km} = \Re\{S_{km}\} = \frac{1}{x_{km}} \mathrm{sen}\,\theta_{km}$$

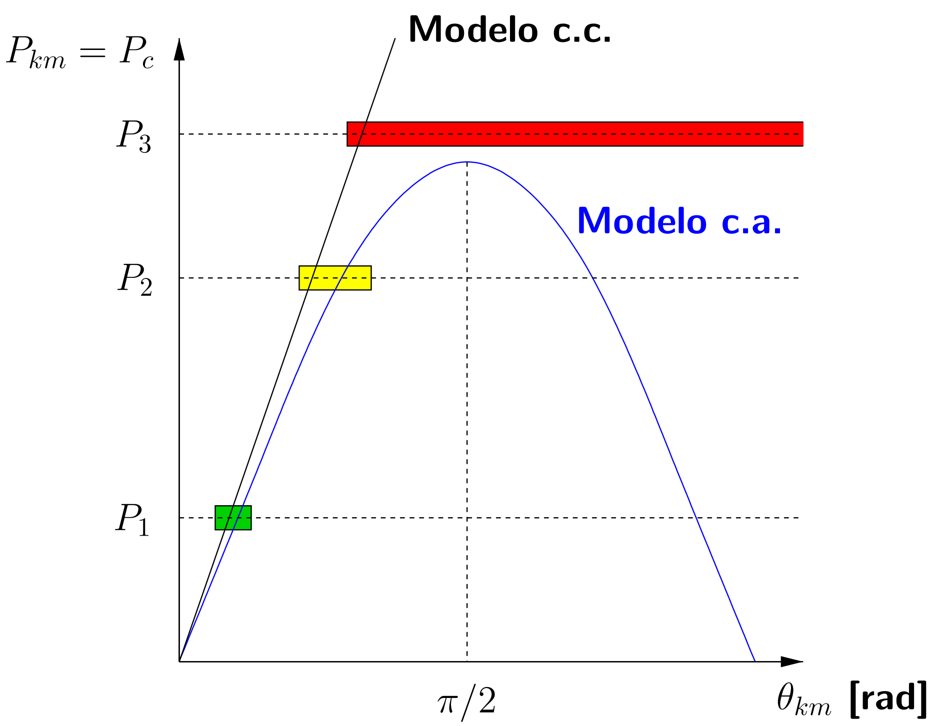
Considerando agora o modelo c.c., faz-se ainda a seguinte simplificação adicional:

$$\mathrm{sen}\,\theta_{km} \approx \theta_{km} \qquad \textbf{(abertura angular pequena)}$$

resultando em:

$$\boxed{P_{km} = \frac{1}{x_{km}} \theta_{km}}$$

As curvas $[P_{km} \times \theta_{km}]$ correspondentes aos modelos c.a. e c.c. são:



Análise:

- **Para $P_c = P_{km} = P_1$, os modelos fornecem soluções, e estas são próximas**

- **Para $P_c = P_{km} = P_2$, os modelos também fornecem soluções, porém, ocorre uma diferença maior entre elas (quanto mais carregada a rede estiver, maior será o erro)**

- **Para $P_c = P_{km} = P_3$, somente o modelo c.c. fornece uma solução. Deve-se notar que P_3 é maior que o limite de estabilidade estática da linha ($\theta_{km} > 90^\circ$), logo, o modelo c.a. não admite solução**

  A solução fornecida pelo modelo c.c. é errada, porém, pode dar uma indicação de quanto o limite da linha foi excedido

  O modelo c.a. não dá informação alguma pois não há solução viável e o processo iterativo de cálculo de fluxo de carga diverge

- O fato do fluxo de carga c.c. sempre fornecer uma solução, mesmo que o fluxo de carga c.a. não a forneça, é muito importante em etapas preliminares do planejamento da expansão de sistemas elétricos

  No planejamento, o acréscimo de carga/geração pode causar problemas de suporte de potência reativa ou falta da capacidade de transmissão, implicando na não convergência do fluxo de carga c.a.

  Estudos preliminares utilizando o fluxo de carga c.c. podem fornecer alguma indicação do que pode estar ocorrendo com a rede em termos de suas limitações

6.5 Representação das perdas de potência ativa no modelo c.c.

- Para redes que apresentam perdas elevadas:
  - o modelo c.c. pode resultar em erros consideráveis
  - esses erros aparecem especialmente para os ramos próximos da barra de referência
  - há casos em que se deve considerar as perdas de potência ativa na transmissão
- As perdas de potência ativa em um ramo k-m são dadas por:

$$P^p_{km} = P_{km} + P_{mk} = g_{km}\left(V_k^2 + V_m^2 - 2V_kV_m\cos\theta_{km}\right)$$

- **São feitas as seguintes considerações:**
  - $V_k \approx V_m \approx 1$ **pu**
  - **A abertura angular θ_{km} é pequena. Através da expansão em série de Taylor, tem-se:**

$$\cos\theta_{km} = 1 - \frac{\theta_{km}^2}{2}$$
$$\operatorname{sen}\theta_{km} = \theta_{km}$$

- **Fazendo as substituições na expressão das perdas de potência ativa:**

$$P_{km}^p = g_{km}\theta_{km}^2 \tag{5}$$

- **A injeção líquida de potência ativa na barra k é:**

$$P_k = V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m \left(G_{km}\cos\theta_{km} + B_{km}\operatorname{sen}\theta_{km}\right)$$

- **Considerando novamente a aproximação relativa às magnitudes das tensões $V_k \approx V_m \approx 1$ e separando o termo da somatória para o qual $m = k$:**

$$P_k = G_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k} \left(G_{km}\cos\theta_{km} + B_{km}\operatorname{sen}\theta_{km}\right)$$

- **Considerando:**

$$G_{km} = -g_{km}$$
$$G_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} g_{km}$$
$$B_{km} \approx x_{km}^{-1} \qquad \textbf{(desprezando as resistências)}$$

obtém-se:

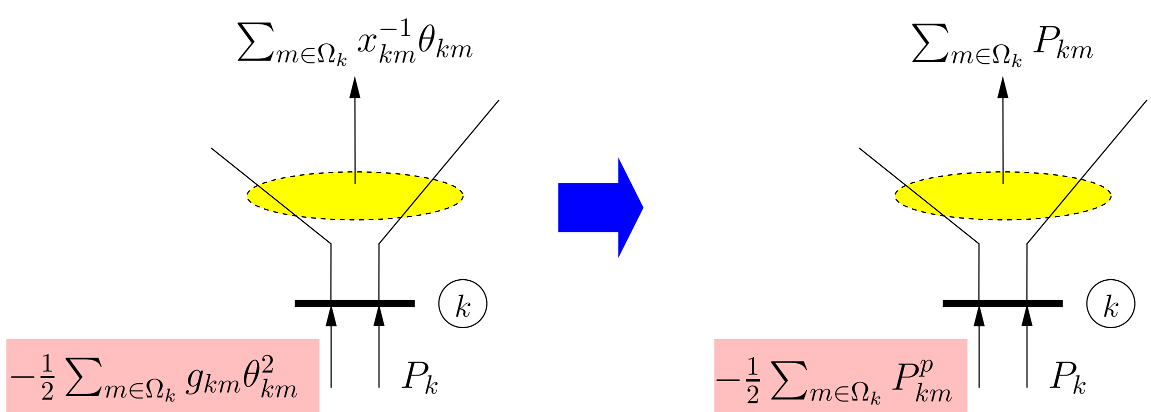
$$
\begin{aligned}
P_k &= \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} + \sum_{m \in \Omega_k} \left(-g_{km} \cos\theta_{km} + x_{km}^{-1} \operatorname{sen}\theta_{km}\right) \\
&= \sum_{m \in \Omega_k} \left[\left(1 - \cos\theta_{km}\right) g_{km}\right] + \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \operatorname{sen}\theta_{km}
\end{aligned}
$$

- **Considerando as aproximações para as funções seno e co-seno (obtidas através da expansão em série de Taylor), rearranjando os termos e lembrando da equação (5):**

$$
P_k - \frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_k} g_{km}\theta_{km}^2 = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1}\theta_{km}
$$

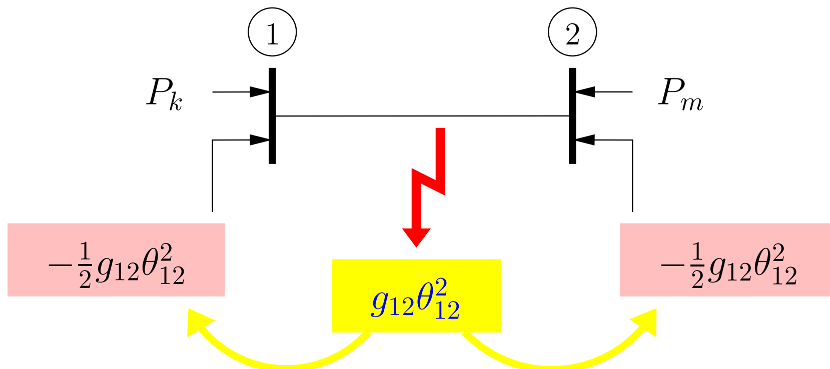
$$
P_k - \frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}^p = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1}\theta_{km}
$$

- **A expressão obtida para P_k equivale à aplicação da lei das correntes de Kirchhoff à barra k em que aparece uma injeção adicional (carga):**



- **A injeção adicional corresponde à metade das perdas de potência ativa de todos os ramos conectados à barra k.**

  As perdas de potência ativa do ramo k-m são divididas: metade é alocada à barra k e a outra metade à barra m.



- **Assim, o modelo c.c. com perdas fica:**

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^p = \mathrm{B}' \cdot \boldsymbol{\theta}$$

- **Os elementos do vetor de perdas de potência ativa dependem dos ângulos de fase nodais, que são justamente as incógnitas do problema.**

O problema de fluxo de carga usando o modelo linearizado é então resolvido em duas etapas:

(1) Resolver o sistema de equações uma vez desprezando as perdas:

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{B}' \cdot \boldsymbol{\theta}'$$

(2) Calcular as perdas aproximadas a partir do vetor θ' e distribuí-las como cargas adicionais (criar vetor $\boldsymbol{P}^p$).

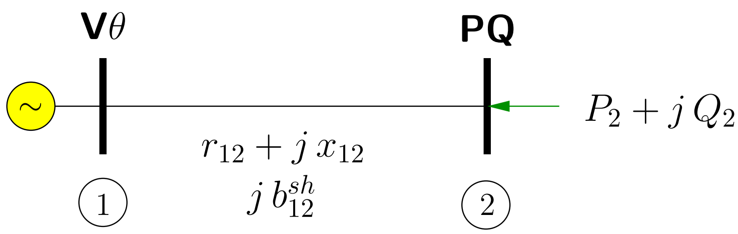
(3) Resolver o problema com perdas:

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^p = \mathrm{B}' \cdot \boldsymbol{\theta}$$

- **Observações:**
  - **são resolvidos dois sistemas lineares**
  - **os vetores independentes são diferentes**
  - **a matriz B' é a mesma, portanto, só precisa ser montada e invertida uma vez**
  - **na análise de contingências as perdas são calculadas para o caso base e consideradas constantes durante a simulação**

Exemplo

Considere a rede de 2 barras e 1 ramo mostrada a seguir.



Os dados da rede são os seguintes:

Barra	Tipo	P	Q	V	θ
1	$V\theta$	–	–	$1,0$	$0,0$
2	**PQ**	$-0{,}30$	$0{,}07$	–	–

Linha	r	x	b^{sh}
1-2	0,20	1,00	0,02

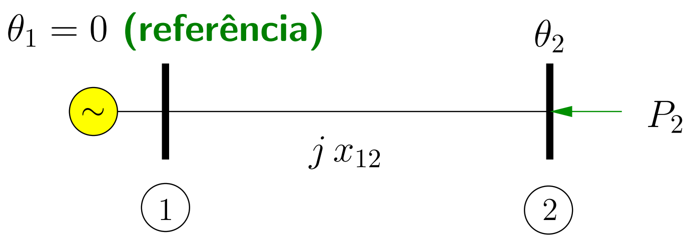
Resolvendo o problema de fluxo de carga pelo método de Newton, obteve-se:

Ângulo de fase da barra 2 $\theta_2 = -0{,}3302$ **rad**

Potência ativa fornecida pelo gerador da barra 1 $P_1 = 0{,}3193$ **pu**

Perdas de potência ativa na linha de transmissão $P^p = 0{,}0193$ **pu**

Considerando agora o mesmo circuito do ponto de vista do modelo linearizado, tem-se:



No caso desta rede, tem-se:

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_2$$

$$\boldsymbol{P} = P_2 = -0{,}30$$

$$\mathbf{B'} = 1/x_{12} = 1{,}0 \qquad \textbf{(escalar)}$$

Logo:

$$\theta_2 = (1{,}0)^{-1} \cdot (-0{,}30) = -0{,}30 \textbf{ rad}$$

De outra forma:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B'} = \begin{bmatrix} 1/x_{12} & -1/x_{12} \\ -1/x_{12} & 1/x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -1{,}0 \\ -1{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Considerando a barra 1 como sendo a referência angular:

$$\mathbf{B'} = \begin{bmatrix} \infty & -1{,}0 \\ -1{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

A solução é dada por:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{B'})^{-1} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ -0{,}30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}30 \end{bmatrix} \textbf{ rad}$$

O fluxo de potência pela linha de transmissão vale:

$$P_{12} = \frac{1}{x_{12}} \cdot (\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{1{,}0} \cdot (0 + 0{,}30) = 0{,}30 \textbf{ pu}$$

A potência fornecida pela barra 1 é igual a:

$P_1 = P_{12} = 0{,}30$ **pu** **(lei das correntes de Kirchhoff para a barra 1)**

A partir dos dados do problema, a condutância da linha de transmissão é:

$$g_{12} = \frac{r_{12}}{r_{12}^2 + x_{12}^2} = \frac{0{,}20}{0{,}20^2 + 1{,}00^2} = 0{,}1923 \textbf{ pu}$$

Para que as perdas de potência na transmissão sejam consideradas, obtém-se o novo vetor das potências nodais:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \begin{bmatrix} P_1 \\ -0{,}30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} g_{12} \theta_{12}^2 \\ -\frac{1}{2} g_{21} \theta_{21}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 \\ -0{,}30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0087 \\ -0{,}0087 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 - 0{,}0087 \\ -0{,}3087 \end{bmatrix} \textbf{ pu} \end{aligned}$$

Para este novo vetor das potências nodais, o estado da rede considerando as perdas na transmissão será:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}3087 \end{bmatrix}$$

O fluxo de potência pela linha de transmissão vale:

$$P_{12} = \frac{1}{x_{12}} \cdot (\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{1{,}0} \cdot (0 + 0{,}3087) = 0{,}3087 \ \textbf{pu}$$

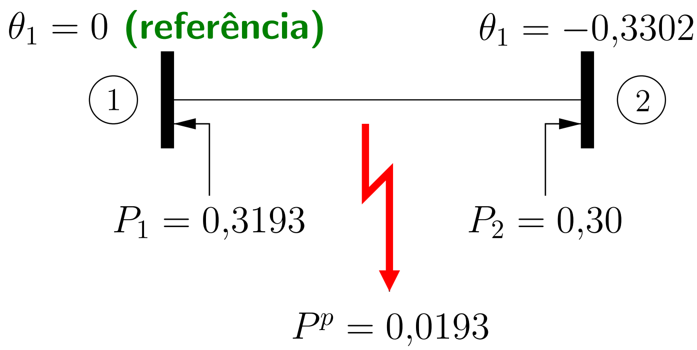
A potência fornecida pela barra 1 é obtida através da aplicação da lei das correntes de Kirchhoff para a barra 1:

$$P_1 - 0{,}0087 = P_{12} = 0{,}3087$$
$$P_1 = 0{,}3174 \ \textbf{pu}$$

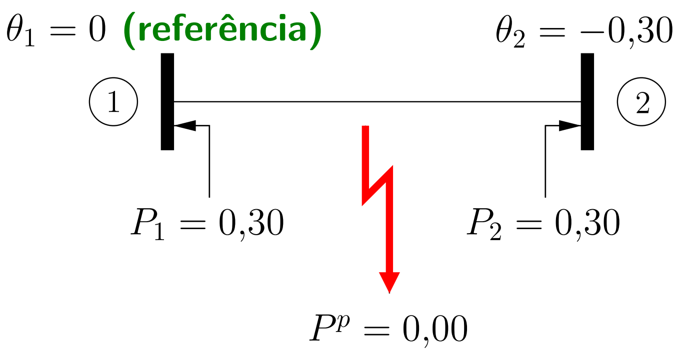
Levando em conta que na realidade a carga é igual a $P_2 = -0{,}3$ pu e que a geração total calculada foi de $P_1 = 0{,}3174$ pu, as perdas na transmissão serão iguais a:

$$\begin{aligned} P_p &= P_1 + P_2 \\ &= 0{,}0174 \ \textbf{pu} \end{aligned}$$

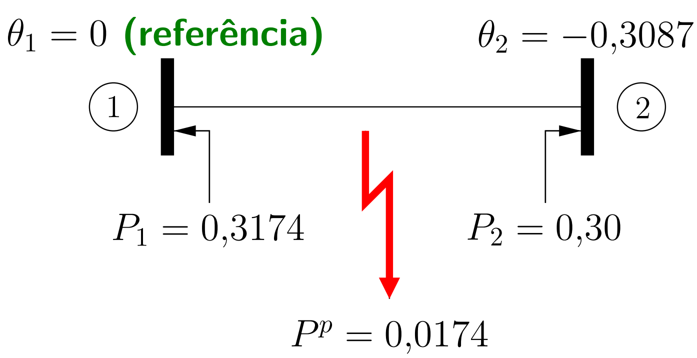
Comparação:



Newton



Linearizado sem perdas



Linearizado com perdas