Capítulo 9
Técnicas de esparsidade

9.1 Grau de esparsidade

- Característica importante dos sistemas de potência: as matrizes são esparsas ($\mathbf{Y}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$, etc.)
- Para uma rede de NB barras e NR ramos:
  - A matriz $\mathbf{Y}$ terá dimensão (NB $\times$ NB)
  - Todos os elementos da diagonal são não nulos
  - Os elementos fora da diagonal Y_{km} e Y_{mk} serão não nulos se houver um ramo conectando as barras k e m
  - Resumindo:

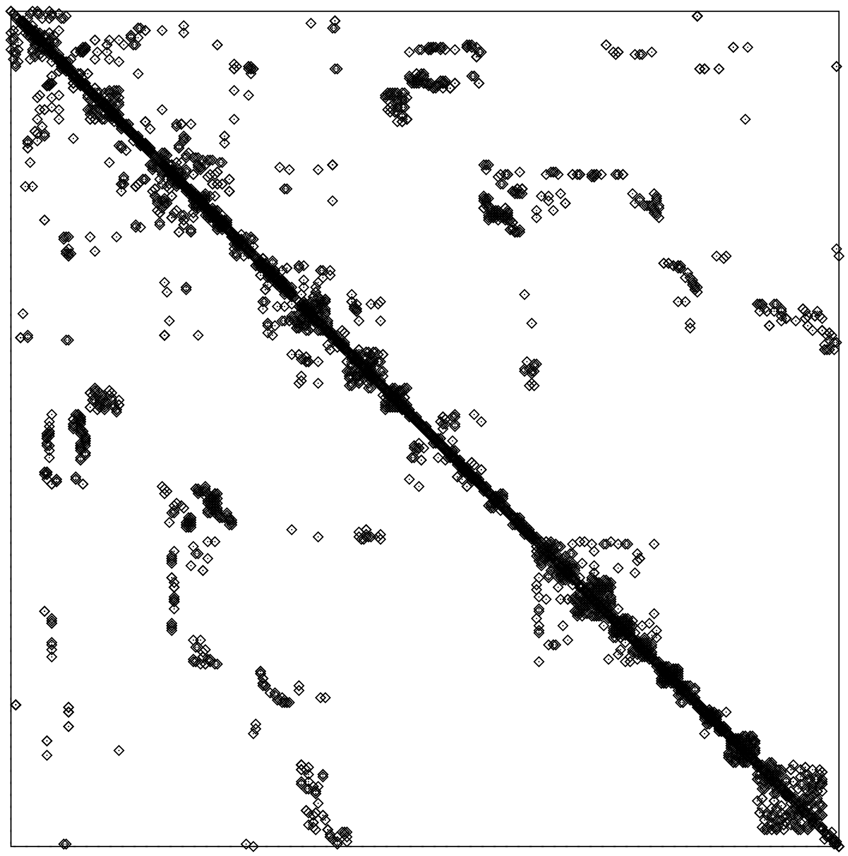
Número total de elementos	NB^2
Número de elementos da diagonal (sempre não nulos)	NB
Número de elementos não nulos fora da diagonal	$2 \cdot$ NR
Número total de elementos não nulos	NB $+ 2 \cdot$ NR

- Grau de esparsidade – porcentagem de elementos nulos da matriz:

$$\text{GE} = \frac{\text{número de elementos nulos}}{\text{número total de elementos}} \cdot 100\% = \frac{\text{NB}^2 - (\text{NB} + 2 \cdot \text{NR})}{\text{NB}^2} \cdot 100\%$$

Exemplo

Considere uma rede com 1663 barras e 2349 ramos (baseada no sistema Sul/Sudeste/Centro-Oeste brasileiro). A matriz Y terá a seguinte estrutura:

$\mathrm{Y} =$ 

O grau de esparsidade neste caso é:

$$\textbf{GE} = \frac{1663^2 - (1663 + 2 \cdot 2349)}{1663^2} \cdot 100\% = 99{,}77\%$$

Problema: grande espaço de memória necessário para armazenar os elementos da matriz Y (e outras), sendo a grande maioria deles iguais a zero.

- **Definição de matriz esparsa**: é aquela para a qual é vantajosa a utilização do fato de que muitos de seus elementos são iguais a zero para fins de economia de memória e cálculos.

- Princípios básicos das técnicas de esparsidade:

  - armazenar somente os elementos não nulos.
  - realizar operações somente com os elementos não nulos.
  - preservar a esparsidade.

- Um algoritmo que armazena e processa somente os elementos não nulos é mais complicado e difícil de programar, sendo conveniente somente quando a matriz tem grandes dimensões.

9.2 Esquemas de armazenamento compacto de matrizes esparsas

- **Idéia básica**: armazenar somente os elementos não nulos da matriz utilizando um conjunto de vetores e apontadores de tal forma que o espaço total de memória utilizado seja menor que o requerido para armazenar toda a matriz.

- Existem muitos esquemas propostos para o armazenamento de matrizes esparsas:

  - foram propostos esquemas para matrizes simétricas e assimétricas.
  - alguns apresentam facilidades para alterações de seus elementos.
  - outros apresentam facilidades para operações utilizando as matrizes.
  - as suas eficiências são diferentes.

> A escolha do esquema de armazenamento a ser utilizado depende do problema que se quer resolver. A eficiência da resolução do problema pode variar muito em função do esquema utilizado

9.2.1 Esquema de Knuth

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & 6 & & & 1 \\ 9 & 4 & & 7 & 2 \\ 5 & & & & 3 \\ & 2 & & 8 & 4 \end{array}$$

Posição	1	2	3	4	5	6	7	
AN	6	9	4	7	5	2	8	elementos não nulos
I	1	2	2	2	3	4	4	linha
J	2	1	2	4	1	2	4	coluna
NR	0	3	4	0	0	7	0	posição do próximo elemento na linha
NC	3	5	6	7	0	0	0	posição do próximo elemento na coluna
JR	1	2	5	6				apontador de início de linha
JC	2	1	0	4				apontador de início de coluna

- **Localização do elemento $(4,4)$:**
  - **elementos não nulos da linha 4 começam na posição JR$(4) = 6$**
  - **na posição 6 está armazenado o elemento da linha I $= 4$ e coluna J $= 2$**
  - **o próximo elemento não nulo está na posição NR$(6) = 7$**
  - **na posição 7 está armazenado o elemento da linha I $= 4$ e coluna J $= 4$, ou seja, AN$(7) = 8 = A_{4,4}$**
  - **como NR$(7) = 0$, não há mais elementos não nulos na linha 4**

- **Obtenção da linha e coluna do elemento armazenado na posição 5:**
  - **como I**$(5) = 3$ **e J**$(5) = 1$**, AN**$(5) = A_{3,1}$
- **Os elementos não nulos podem ser armazenados em qualquer ordem no vetor AN**
- **A posição de cada elemento do vetor AN é armazenada em dois vetores I (linha) e J (coluna)**
- **Para facilitar a obtenção de elementos de uma certa linha ou coluna da matriz, é necessário armazenar também:**
  - **um par de apontadores (NR e NC) que indicam as posições dos próximos elementos não nulos da linha ou coluna**
  - **apontadores de início de linha (JR) e coluna (JC)**
- **Para cada elemento não nulo de** A **é necessário armazenar 5 valores, além dos apontadores de início de linha e coluna**
- **Vantagens do esquema de Knuth:**
  - **pode-se acrescentar ou eliminar elementos facilmente**
  - **pode-se varrer as linhas e colunas eficientemente**

9.2.2 Esquema circular KRM (Knuth-Rheinboldt-Mesztenyi)

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline \cdot & 6 & \cdot & \cdot & 1 \\ 9 & 4 & \cdot & 7 & 2 \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 2 & \cdot & 8 & 4 \end{array}$$

Posição	1	2	3	4	5	6	7	
AN	6	9	4	7	5	2	8	elementos não nulos
NR	1	3	4	2	5	7	6	posição do próximo elemento na linha
NC	3	5	6	7	2	1	4	posição do próximo elemento na coluna
JR	1	2	5	6				apontador de início de linha
JC	2	1	0	4				apontador de início de coluna

► **Localização do elemento $(4, 2)$:**

- **elementos não nulos da linha 4 começam na posição JR**$(4) = 6 \rightarrow S_4 = \{6\}$
- **o próximo elemento não nulo da linha 4 está na posição NR**$(6) = 7$ $\rightarrow S_4 = \{6, 7\}$
- **como NR**$(7) = 6 \in S_4$**, não há mais elementos não nulos na linha 4**
- **elementos não nulos da coluna 2 começam na posição JC**$(2) = 1 \rightarrow$ $S^2 = \{1\}$
- **o próximo elemento não nulo da coluna 2 está na posição NC**$(1) = 3$ $\rightarrow S^2 = \{1, 3\}$
- **o próximo elemento não nulo da coluna 2 está na posição NC**$(3) = 6$ $\rightarrow S^2 = \{1, 3, 6\}$
- **como NC**$(6) = 1 \in S^2$**, não há mais elementos não nulos na coluna 2**
- $S_4 \cap S^2 = 6 \rightarrow A_{4,2} =$ **AN**$(6) = 2$

- **Localização do elemento** $(1,1)$**:**
  - **elementos não nulos da linha 1 começam na posição JR**$(1) = 1 \rightarrow S_1 = \{1\}$
  - **como NR**$(1) = 1 \in S_1$**, não há mais elementos não nulos na linha 1**
  - **elementos não nulos da coluna 1 começam na posição e JC**$(1) = 2 \rightarrow S^1 = \{2\}$
  - **o próximo elemento não nulo da coluna 1 está na posição NC**$(2) = 5 \rightarrow S^1 = \{2, 5\}$
  - **como NR**$(5) = 2 \in S^1$**, não há mais elementos não nulos na coluna 1**
  - $S_1 \cap S^1 = \emptyset \rightarrow A_{1,1} = 0$

- **Ao se percorrer os elementos de uma linha (coluna), não se obtêm diretamente as informações das colunas (linhas)**

- **É impossível obter a linha e coluna de um elemento armazenado em uma certa posição (por exemplo, posição 5), a menos que se percorra toda a matriz**

- **O esquema circular KRM requer um menor espaço de memória se comparado com o esquema de Knuth**

9.2.3 Esquema circular KRM modificado

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & 6 & & & 1 \\ 9 & 4 & & 7 & 2 \\ 5 & & & & 3 \\ & 2 & & 8 & 4 \end{array}$$

Posição	1	2	3	4	5	6	7	
AN	6	9	4	7	5	2	8	elementos não nulos
NR	-1	3	4	-2	-3	7	-4	posição do próximo elemento na linha
NC	3	5	6	7	-1	-2	-4	posição do próximo elemento na coluna
JR	1	2	5	6				apontador de início de linha
JC	2	1	0	4				apontador de início de coluna

- **Localização do elemento $(4, 2)$:**
  - **elementos não nulos da linha 4 começam na posição JR**$(4) = 6 \rightarrow S_4 = \{6\}$
  - **o próximo elemento não nulo da linha 4 está na posição NR**$(6) = 7$ $\rightarrow S_4 = \{6, 7\}$
  - **como NR**$(7) = -4 < 0$**, não há mais elementos não nulos na linha 4**
  - **elementos não nulos da coluna 2 começam na posição JC**$(2) = 1 \rightarrow$ $S^2 = \{1\}$
  - **o próximo elemento não nulo da coluna 2 está na posição NC**$(1) = 3$ $\rightarrow S^2 = \{1, 3\}$
  - **o próximo elemento não nulo da coluna 2 está na posição NC**$(3) = 6$ $\rightarrow S^2 = \{1, 3, 6\}$
  - **como NC**$(6) = -2 < 0$**, não há mais elementos não nulos na coluna 2**
  - $S_4 \cap S^2 = 6 \rightarrow A_{4,2} =$ **AN**$(6) = 2$

- **Localização do elemento $(1,1)$:**
  - **elementos não nulos da linha 1 começam na posição JR$(1) = 1 \rightarrow S_1 = \{1\}$**
  - **como NR$(1) = -1 < 0$, não há mais elementos não nulos na linha 1**
  - **elementos não nulos da coluna 1 começam na posição JC$(1) = 2 \rightarrow S^1 = \{2\}$**
  - **o próximo elemento não nulo da coluna 1 está na posição NC$(2) = 5 \rightarrow S^1 = \{2, 5\}$**
  - **como NC$(5) = -1 < 0$, não há mais elementos não nulos na coluna 1**
  - $S_1 \cap S^1 = \emptyset \rightarrow A_{1,1} = 0$

- **Assim como no esquema circular KRM, ao se percorrer os elementos de uma linha (coluna), não se obtêm diretamente as informações das colunas (linhas)**

- **O esquema circular KRM modificado permite a obtenção da linha e coluna de um elemento a partir de sua posição sem percorrer toda a matriz**

- **Obtenção da linha e coluna do elemento armazenado na posição 4:**
  - **como NR$(4) = -2 < 0$, o elemento pertence à linha 2**
  - **NC$(4) = 7$**
  - **como NC$(7) = -4 < 0$, o elemento pertence à coluna 4 $\rightarrow$ AN$(4) = A_{2,4}$**

9.2.4 Esquema RR(C)O (Row-wise Representation Complete and Ordered)

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{cccccccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\
\hline
 & & 1 & 3 & & & & 5 & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & 2 \\
 & & & & & 7 & & 1 & & & 3
\end{array}
$$

Posição	1	2	3	4	5	6	
IA	1	4	4	6			apontador de início de linha
JA	3	4	8	6	8		índice de coluna
AN	1	3	5	7	1		elementos não nulos

- **Os elementos não nulos da linha 1 começam na posição IA$(1) = 1$**

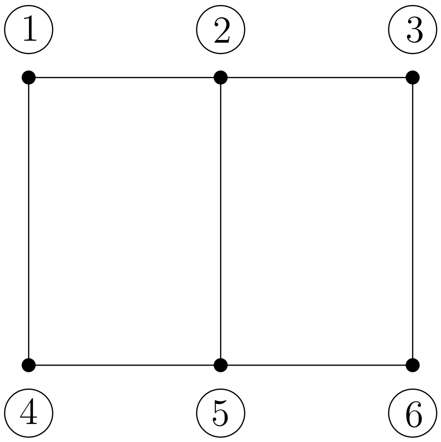
  Como IA$(2) = 4 \rightarrow$ IA$(2) -$ IA$(1) = 3 \rightarrow$ há 3 elementos não nulos na linha 1 e estão armazenados nas posições 1, 2 e 3

  O primeiro elemento não nulo da linha 1 é AN$(1) = 1$ localizado na coluna JA$(1) = 3$, ou seja AN$(1) = A_{1,3}$, etc.

- **É um dos esquemas mais utilizados, pois:**
  - **exige pequeno espaço de armazenamento**
  - **é de fácil manipulação para adição, multiplicação e transposição de matrizes esparsas**
  - **é de fácil manipulação para a resolução de sistemas de equações lineares envolvendo matrizes esparsas (do tipo $\mathrm{A} \cdot x = b$, sendo A uma matriz esparsa) $\rightarrow$ adequado para utilização em sistemas de potência**

- **Outras versões são possíveis, como CR(C)O (column-wise representation complete and ordered), RR(U)U (row-wise representation upper and unordered), etc.**

9.2.5 Esquema de Zollenkopf



$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\times & \times & & \times & & \\
\times & \times & \times & & \times & \\
 & \times & \times & & & \times \\
\times & & & \times & \times & \\
 & \times & & \times & \times & \times \\
 & & \times & & \times & \times
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

- **Considere que a matriz seja:**
  - **estruturalmente simétrica** $\rightarrow$ **se** $A_{i,j} \neq 0$ **então** $A_{j,i} \neq 0$
  - **numericamente assimétrica** $\rightarrow$ **em geral** $A_{i,j} \neq A_{j,i}$

Posição	LCOL	NOZE	ITAG	LNXT	DE	CE	RE
1	1	3	2	2	$A_{1,1}$	$A_{2,1}$	$A_{1,2}$
2	3	4	4	0	$A_{2,2}$	$A_{4,1}$	$A_{1,4}$
3	6	3	1	4	$A_{3,3}$	$A_{1,2}$	$A_{2,1}$
4	8	3	3	5	$A_{4,4}$	$A_{3,2}$	$A_{2,3}$
5	10	4	5	0	$A_{5,5}$	$A_{5,2}$	$A_{2,5}$
6	13	3	2	7	$A_{6,6}$	$A_{2,3}$	$A_{3,2}$
7			6	0		$A_{6,3}$	$A_{3,6}$
8			1	9		$A_{1,4}$	$A_{4,1}$
9			5	0		$A_{5,4}$	$A_{4,5}$
10			2	11		$A_{2,5}$	$A_{5,2}$
11			4	12		$A_{4,5}$	$A_{5,4}$
12			6	0		$A_{6,5}$	$A_{5,6}$
13			3	14		$A_{3,6}$	$A_{6,3}$
14			5	0		$A_{5,6}$	$A_{6,5}$

LCOL indicador do início dos elementos não nulos da coluna (linha)
NOZE número de elementos não nulos da coluna (linha)
ITAG índice de linha (coluna) dos elementos armazenados em CE (RE)
LNXT posição do próximo elemento não nulo da coluna (linha)
DE elemento da diagonal da matriz
CE elementos não nulos fora da diagonal armazenados por coluna
RE elementos não nulos fora da diagonal armazenados por linha

- **Busca dos elementos da coluna/linha 1 da matriz:**
  - **DE**$(1) = A_{1,1}$ **é o elemento da diagonal ; há NOZE**$(1) = 3$ **elementos não nulos na coluna/linha 1**
  - **os elementos não nulos da coluna/linha 1 começam a ser armazenados na posição LCOL**$(1) = 1$
  - **ITAG**$(2) = 2$ **corresponde à linha/coluna 2** $\rightarrow$ **CE**$(1) = A_{2,1}$ **e RE**$(1) = A_{1,2}$
  - **próximo elemento não nulo está na posição LNXT**$(1) = 2$
  - **ITAG**$(2) = 4$ **corresponde à linha/coluna 4** $\rightarrow$ **CE**$(2) = A_{4,1}$ **e RE**$(2) = A_{1,4}$
  - **como LNXT**$(2) = 0$ **não há mais elementos não nulos na coluna/linha 1**

- **Busca dos elementos da coluna/linha 5 da matriz:**
  - **DE**$(5) = A_{5,5}$ **é o elemento da diagonal ; há NOZE**$(5) = 4$ **elementos não nulos na coluna/linha 1**
  - **os elementos não nulos da coluna/linha 5 começam a ser armazenados na posição LCOL**$(5) = 10$
  - **ITAG**$(10) = 2$ **corresponde à linha/coluna 2** $\rightarrow$ **CE**$(10) = A_{2,5}$ **e RE**$(10) = A_{5,2}$
  - **próximo elemento não nulo está na posição LNXT**$(10) = 11$
  - **ITAG**$(11) = 4$ **corresponde à linha/coluna 4** $\rightarrow$ **CE**$(11) = A_{4,5}$ **e RE**$(11) = A_{5,4}$
  - **próximo elemento não nulo está na posição LNXT**$(11) = 12$
  - **ITAG**$(12) = 6$ **corresponde à linha/coluna 6** $\rightarrow$ **CE**$(12) = A_{6,5}$ **e RE**$(12) = A_{5,6}$
  - **como LNXT**$(12) = 0$ **não há mais elementos não nulos na coluna/linha 5**

- **É um esquema bastante utilizado em sistemas de potência**
- **Não é o melhor esquema em termos de economia de armazenamento, mas apresenta boa flexibilidade de utilização**
- **O esquema de Zollenkopf também pode ser utilizado para matrizes estrutural e numericamente simétricas. Neste caso, os vetores RE e DE podem ser eliminados.**

9.3 Resolução de sistemas de equações algébricas lineares envolvendo matrizes esparsas

9.3.1 Resolução direta

► **Considere o seguinte sistema de equações algébricas lineares colocada na forma matricial:**

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

em que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & & 2 & & \\ 2 & 9 & 2 & & 1 & \\ & 1 & 8 & & & 1 \\ 1 & & & 9 & 2 & \\ & 2 & & 2 & 10 & 1 \\ & & 1 & & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad \textbf{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A solução é dada por:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \mathrm{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\
&= \begin{bmatrix} 0{,}1052 & -0{,}0135 & 0{,}0035 & -0{,}0248 & 0{,}0064 & -0{,}0011 \\ -0{,}0250 & 0{,}1205 & -0{,}0307 & 0{,}0087 & -0{,}0143 & 0{,}0050 \\ 0{,}0033 & -0{,}0156 & 0{,}1308 & -0{,}0015 & 0{,}0033 & -0{,}0149 \\ -0{,}0134 & 0{,}0073 & -0{,}0022 & 0{,}1196 & -0{,}0250 & 0{,}0030 \\ 0{,}0078 & -0{,}0260 & 0{,}0081 & -0{,}0260 & 0{,}1091 & -0{,}0130 \\ -0{,}0012 & 0{,}0046 & -0{,}0154 & 0{,}0030 & -0{,}0125 & 0{,}1142 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0{,}0433 \\ 0{,}1369 \\ 0{,}3349 \\ 0{,}2149 \\ 0{,}0113 \\ 0{,}1838 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- **Obter a inversa da matriz A e multiplicá-la pelo vetor b são tarefas simples de serem realizadas, mesmo que a matriz A esteja armazenada de forma compacta.**

Problema: **a matriz A^{-1} é cheia. Do ponto de vista de espaço de memória, não é vantajoso armazená-la utilizando os esquemas de armazenamento compacto.**

Lembrar que os príncipios básicos das técnicas de esparsidade são: armazenar somente os elementos não nulos, realizar operações somente com os elementos não nulos e preservar a esparsidade.

9.3.2 Resolução através da eliminação de Gauss

- **Parte-se de uma matriz aumentada contendo a matriz A e o vetor b e obtém-se uma nova matriz aumentada que contém o vetor solução x:**

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \boldsymbol{b} \end{array}\right]$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \boldsymbol{x} \end{array}\right]$$

em que I é a matriz identidade. Para a obtenção de I a partir de A deve-se realizar operações (combinações lineares) entre as linhas de A, de forma a:

Passo 1 tornar todos os elementos do triângulo inferior de A iguais a 0;
Passo 2 tornar todos os elementos da diagonal de A iguais a 1;
Passo 3 tornar todos os elementos do triângulo superior de A iguais a 0.

Após os três passos acima terem sido executados, a coluna adicional da matriz aumentada que inicialmente continha o vetor independente b conterá o vetor solução x.

▶ **Considere novamente a matriz $\mathbf{A}$:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & & 2 & & \\ 2 & 9 & 2 & & 1 & \\ & 1 & 8 & & & 1 \\ 1 & & & 9 & 2 & \\ & 2 & & 2 & 10 & 1 \\ & & 1 & & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 10 & 1 & & 2 & & & 1 \\ 2 & 9 & 2 & & 1 & & 2 \\ & 1 & 8 & & & 1 & 3 \\ 1 & & & 9 & 2 & & 2 \\ & 2 & & 2 & 10 & 1 & 1 \\ & & 1 & & 1 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

▶ **Deve-se realizar inicialmente o passo 1 (tornar todos os elementos do triângulo inferior de $\mathbf{A}$ iguais a 0)**

A primeira posição a ser zerada é a posição (2,1) ($A_{2,1} = 2$)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 10 & 1 & & 2 & & & 1 \\ 2 & 9 & 2 & & 1 & & 2 \\ & 1 & 8 & & & 1 & 3 \\ 1 & & & 9 & 2 & & 2 \\ & 2 & & 2 & 10 & 1 & 1 \\ & & 1 & & 1 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{linha 1} \cdot (-2/10) + \textbf{linha 2} \\ \downarrow \\ \textbf{linha 2} \end{array}}$$

que resulta em:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 10{,}0 & 1{,}0 & 0 & 2{,}0 & 0 & 0 & 1{,}0 \\ 0 & 8{,}8 & 2{,}0 & -0{,}4 & 1{,}0 & 0 & 1{,}8 \\ 0 & 1{,}0 & 8{,}0 & 0 & 0 & 1{,}0 & 3{,}0 \\ 1{,}0 & 0 & 0 & 9{,}0 & 2{,}0 & 0 & 2{,}0 \\ 0 & 2{,}0 & 0 & 2{,}0 & 10{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 & 0 & 1{,}0 & 9{,}0 & 2{,}0 \end{array}\right]$$

- **Observações:**
  - $A_{2,1} = 0$
  - $A_{2,4} \neq 0$ **(essa posição era originalmente igual a zero)**
    Estes novos elementos não nulos que aparecem em posições originalmente nulas devido às operações realizadas são chamados de fill-ins.
  - **todos os esquemas de armazenamento compacto de matrizes devem prever um espaço de memória adicional para levar em conta o possível aparecimento de fill-ins**
  - **a operação realizada equivale a premultiplicar a matriz aumentada por uma matriz $\mathbf{L_1}$ tal que a matriz resultante tenha $A_{2,1} = 0$:**

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \alpha_{2,1} & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_{2,1} = -A_{2,1}/A_{1,1} = -2/10$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A_1} & \boldsymbol{b}_1 \end{array}\right] = \mathbf{L_1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \boldsymbol{b} \end{array}\right]$$

  - $\alpha_{2,1}$ **é chamado de fator triangular.**

- **A coluna correspondente ao vetor b foi alterada na posição 2, resultando no vetor b_1:**

$$\boxed{b_2 \leftarrow b_1 \cdot \alpha_{2,1} + b_2}$$

- **O próximo passo é zerar a posição (4,1) ($A_{4,1} = 1$). Para isso, a seguinte operação é realizada:**

$$\boxed{\textbf{linha 4} \leftarrow \textbf{linha 1} \cdot (-1/10) + \textbf{linha 4}}$$

e o resultado é:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 10{,}0 & 1{,}0 & 0 & 2{,}0 & 0 & 0 & 1{,}0 \\ 0 & 8{,}8 & 2{,}0 & -0{,}4 & 1{,}0 & 0 & 1{,}8 \\ 0 & 1{,}0 & 8{,}0 & 0 & 0 & 1{,}0 & 3{,}0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 & 8{,}8 & 2{,}0 & 0 & 1{,}9 \\ 0 & 2{,}0 & 0 & 2{,}0 & 10{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 & 0 & 1{,}0 & 9{,}0 & 2{,}0 \end{array}\right]$$

Nota-se que um novo fill-in apareceu na posição correspondente a $A_{4,2}$ e que a posição correspondente a b_4 foi alterada.

► O processo continua até que todo o triângulo inferior de A tenha sido zerado:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 10{,}0000 & 1{,}0000 & 0 & 2{,}0000 & 0 & 0 & 1{,}0000 \\ 0 & 8{,}8000 & 2{,}0000 & -0{,}4000 & 1{,}0000 & 0 & 1{,}8000 \\ 0 & 0 & 7{,}7727 & 0{,}0455 & -0{,}1136 & 1{,}0000 & 2{,}7955 \\ 0 & 0 & 0 & 8{,}7953 & 2{,}0117 & -0{,}0029 & 1{,}9123 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9{,}2872 & 1{,}0592 & 0{,}2992 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8{,}7555 & 1{,}6089 \end{array}\right]$$

► **O passo 2 corresponde a tornar todos os elementos da diagonal de A iguais a 1.**

Para tornar o elemento $A_{1,1}$ igual a 1, deve-se realizar a seguinte operação:

$$\boxed{\textbf{linha 1} \leftarrow \textbf{linha 1} \cdot (1/10)}$$

ou, da mesma forma, premultiplicar a matriz aumentada por uma matriz $\mathbf{D_1}$ tal que a matriz resultante tenha $A_{1,1} = 1$:

$$\mathbf{D_1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_{1,1} = 1/A_{1,1} = 1/10$$

▶ **Realizando essas operações para todas as linhas, obtém-se finalmente:**

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1{,}0000 & 0{,}1000 & 0 & 0{,}2000 & 0 & 0 & 0{,}1000 \\ 0 & 1{,}0000 & 0{,}2273 & -0{,}0455 & 0{,}1136 & 0 & 0{,}2045 \\ 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}0058 & -0{,}0146 & 0{,}1287 & 0{,}3596 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}2287 & -0{,}0003 & 0{,}2174 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}1140 & 0{,}0322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}1838 \end{array}\right]$$

▶ **O passo 3 consiste em zerar todos os elementos do triângulo superior de $\mathbf{A}$.**

Começando pelo elemento $A_{5,6} = 0{,}1140$, deve-se realizar a seguinte operação:

$$\boxed{\textbf{linha 5} \leftarrow \textbf{linha 6} \cdot (-0{,}1140) + \textbf{linha 5}}$$

ou, da mesma forma, premultiplicar a matriz aumentada por uma matriz $\mathbf{U_1}$ tal que a matriz resultante tenha $A_{5,6} = 0$:

$$\mathbf{U_1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \alpha_{5,6} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_{5,6} = -A_{5,6} = -0{,}1140$$

O resultado da operação é:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1{,}0000 & 0{,}1000 & 0 & 0{,}2000 & 0 & 0 & 0{,}1000 \\ 0 & 1{,}0000 & 0{,}2273 & -0{,}0455 & 0{,}1136 & 0 & 0{,}2045 \\ 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}0058 & -0{,}0146 & 0{,}1287 & 0{,}3596 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}2287 & -0{,}0003 & 0{,}2174 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0 & 0{,}0113 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}1838 \end{array}\right]$$

- **Repetindo o procedimento para todos os elementos não nulos do triângulo superior de $\mathbf{A}$ chega-se a:**

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0433 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1369 \\ 0 & 0 & 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3349 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 & 0 & 0 & 0{,}2149 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0 & 0 & 0{,}0113 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0 & 0{,}1838 \end{array}\right]$$

solução x

- **os valores de α ao longo do processo de eliminação de Gauss são chamados de fatores triangulares. O processo de obtenção dos valores de α também é chamado de fatoração triangular.**

- **Idéia: armazenar os fatores triangulares α nas posições correspondentes aos elementos que se desejou zerar ou tornar iguais a 1:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}1000 & -0{,}1000 & 0 & -0{,}2000 & 0 & 0 \\ -0{,}2000 & 0{,}1136 & -0{,}2273 & 0{,}0455 & -0{,}1136 & 0 \\ 0 & -0{,}1136 & 0{,}1287 & -0{,}0058 & 0{,}0146 & -0{,}1287 \\ -0{,}1000 & 0{,}0114 & -0{,}0029 & 0{,}1137 & -0{,}2287 & 0{,}0003 \\ 0 & -0{,}2273 & 0{,}0585 & -0{,}2380 & 0{,}1077 & -0{,}1140 \\ 0 & 0 & -0{,}1287 & 0{,}0007 & -0{,}1094 & 0{,}1142 \end{bmatrix}$$

No caso da matriz $\mathbf{A}$ ser armazenada de forma compacta, o número de fatores triangulares a ser armazenado é igual ao número de elementos não nulos originais de $\mathbf{A}$ mais aqueles correspondentes a fill-ins.

Conhecendo-se os fatores triangulares e a ordem em que eles devem ser utilizados, pode-se repetir as operações para vários vetores independentes $\boldsymbol{b}$.

- **No caso da matriz $\mathbf{A}$ do exemplo, o processo de fatoração resultou em 8 fill-ins (oito elementos adicionais que devem ser armazenados).**
- **Resumo das operações realizadas:**

$$(\mathbf{U_{11}} \cdot \mathbf{U_{10}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{U_2} \cdot \mathbf{U_1}) \cdot (\mathbf{D_6} \cdot \ldots \cdot \mathbf{D_1}) \cdot (\mathbf{L_{11}} \cdot \mathbf{L_{10}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{L_1}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$
$$(\mathbf{U_{11}} \cdot \mathbf{U_{10}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{U_2} \cdot \mathbf{U_1}) \cdot (\mathbf{D_6} \cdot \ldots \cdot \mathbf{D_1}) \cdot (\mathbf{L_{11}} \cdot \mathbf{L_{10}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{L_1}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$$

Logo:

$$\mathbf{A} = \left[(\mathbf{U_{11}} \cdot \mathbf{U_{10}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{U_2} \cdot \mathbf{U_1}) \cdot (\mathbf{D_6} \cdot \ldots \cdot \mathbf{D_1}) \cdot (\mathbf{L_{11}} \cdot \mathbf{L_{10}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{L_1})\right]^{-1}$$

ou:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left(\mathbf{L_1}^{-1} \cdot \mathbf{L_2}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_{10}}^{-1} \cdot \mathbf{L_{11}}^{-1}\right) \cdot \left(\mathbf{D_1}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{D_6}^{-1}\right) \cdot \\ &\quad \left(\mathbf{U_1}^{-1} \cdot \mathbf{U_2}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{U_{10}}^{-1} \cdot \mathbf{U_{11}}^{-1}\right) \\ &= \mathbf{L}\,\mathbf{D}\,\mathbf{U}\end{aligned}$$

Este processo também é chamado de decomposição LDU da matriz A, em que:

- L é uma matriz triangular inferior (lower triangular) – somente o triângulo inferior tem elementos não nulos.
- D é uma matriz diagonal – somente a diagonal tem elementos não nulos.
- U é uma matriz triangular superior (upper triangular) – somente o triângulo superior tem elementos não nulos.

- A matriz L é igual a:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1}^{-1} \cdot \mathbf{L_2}^{-1} \cdot \mathbf{L_3}^{-1} \cdot \mathbf{L_4}^{-1} \cdot \mathbf{L_5}^{-1} \cdot \mathbf{L_6}^{-1} \cdot \mathbf{L_7}^{-1} \cdot \mathbf{L_8}^{-1} \cdot \mathbf{L_9}^{-1} \cdot \mathbf{L_{10}}^{-1} \cdot \mathbf{L_{11}}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2000 & 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1136 & 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1000 & -0{,}0114 & 0{,}0029 & 1{,}0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2273 & -0{,}0585 & 0{,}2380 & 1{,}0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1287 & -0{,}0007 & 0{,}1094 & 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

Os elementos do triângulo inferior correspondem ao negativo dos fatores triangulares α obtidos anteriormente.

▶ **As matrizes D e U são:**

$$\mathbf{D} = \mathbf{D_1}^{-1} \cdot \mathbf{D_2}^{-1} \cdot \mathbf{D_3}^{-1} \cdot \mathbf{D_4}^{-1} \cdot \mathbf{D_5}^{-1} \cdot \mathbf{D_6}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 10{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8{,}8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}7727 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8{,}7953 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9{,}2872 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8{,}7555 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U_1}^{-1} \cdot \mathbf{U_2}^{-1} \cdot \mathbf{U_3}^{-1} \cdot \mathbf{U_4}^{-1} \cdot \mathbf{U_5}^{-1} \cdot \mathbf{U_6}^{-1} \cdot \mathbf{U_7}^{-1} \cdot \mathbf{U_8}^{-1} \cdot \mathbf{U_9}^{-1} \cdot \mathbf{U_{10}}^{-1} \cdot \mathbf{U_{11}}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0{,}1000 & 0 & 0{,}2000 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0000 & 0{,}2273 & -0{,}0455 & 0{,}1136 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}0058 & -0{,}0146 & 0{,}1287 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}2287 & -0{,}0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0{,}1140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

▶ **Normalmente a matriz D é incorporada a L ($\mathrm{L} \leftarrow \mathrm{L} \cdot \mathrm{D}$):**

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$$

▶ **A solução é dada por:**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{b} \\ &= (\mathbf{L}\,\mathbf{U})^{-1}\,\boldsymbol{b} \\ &= \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{L}^{-1}\,\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

ou

$$w = \mathrm{L}^{-1}\, b \qquad\qquad \text{Substituição forward}$$
$$x = \mathrm{U}^{-1}\, w \qquad\qquad \text{Substituição back}$$

- Procedimento geral de solução do problema $\mathrm{A}\, x = b$:
  - Armazenar a matriz A utilizando algum esquema de armazenamento compacto.
  - Reordenar linhas e colunas de forma a minimizar o número de fill-ins (existem várias técnicas propostas para esse fim).
  - Obter os fatores triangulares.
  - Realizar a substituição forward.
  - Realizar substituição back ➡ SOLUÇÃO.

9.4 Técnicas de vetores esparsos

- O estudo de vários problemas relacionados com redes elétricas de potência passam pela resolução de um sistema de equações algébricas lineares do tipo:

$$\mathrm{A}\, x = b$$

- Alguns exemplos: análise de contingências
  despacho econômico
  planejamento da expansão de redes
  cálculo de curto-circuito

- **A matriz $\mathbf{A}$ pode ser fatorada na forma:**

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{D}\,\mathbf{U}$$

e a solução do sistema de equações pode ser realizada em duas etapas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{L}^{-1}\,\boldsymbol{b} && \text{Substituição forward} \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{U}^{-1}\,\boldsymbol{w} && \text{Substituição back} \end{aligned}$$

- **Situação 1: O vetor $\boldsymbol{b}$ é esparso $\rightarrow$ apresenta grande número de elementos nulos:**

  Não é necessário realizar todas as operações da substituição forward, mas somente um subconjunto delas $\rightarrow$ Substituição FAST forward.

- **Situação 2: O vetor $\boldsymbol{x}$ é esparso $\rightarrow$ deseja-se conhecer apenas alguns poucos elementos:**

  Não é necessário realizar todas as operações da substituição back, mas somente um subconjunto delas $\rightarrow$ Substituição FAST back.

- **Os subconjuntos utilizados nas substituições fast forward e fast back dependem das estruturas de esparsidade de $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x}$.**

- **Hoje em dia as técnicas de vetores esparsos são utilizadas rotineiramente em programas de análise de redes elétricas de potência.**