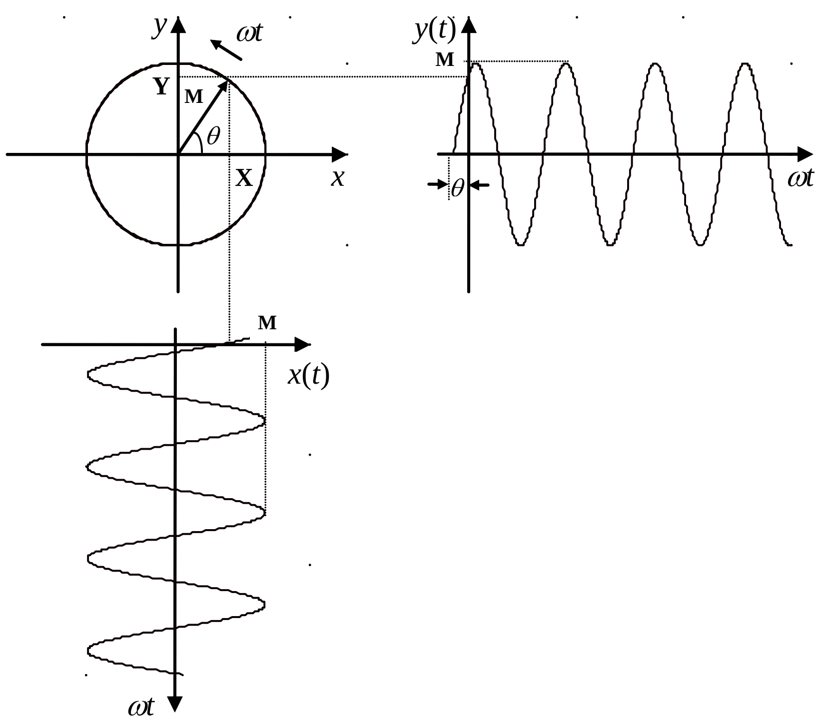
Atenção
É obrigatório o uso de régua, esquadro, compasso e transferidor.

Introdução:

O objetivo deste módulo é familiarizar o aluno com um método fasorial de análise de circuitos lineares sob excitação senoidal com frequência fixa. A importância desta técnica deve-se à grande simplificação que resulta na análise de sistemas elétricos lineares que operam na frequência industrial (60 Hz).

Revisão da Teoria:

A chave para este procedimento está em considerar um sinal senoidal do circuito como sendo a projeção de um vetor girante sobre um dos eixos do plano [*x*-*y*]:



$x(t) = M \cdot \cos(\omega t + \theta)$ $\quad$ $X = M \cos\theta \rightarrow$ componente *x* inicial

$y(t) = M \cdot \text{sen}(\omega t + \theta)$ $\quad$ $Y = M \text{ sen } \theta \rightarrow$ componente *y* inicial

Com base na fórmula de Euler podemos representar as projeções no plano complexo, resultando um vetor girante:

$$\zeta(t) = M[\cos(\omega t + \theta) + \mathrm{j}\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)] = M \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)}$$

onde:

$M = \sqrt{X^2 + Y^2}$	$\rightarrow$	magnitude do **vetor girante** $\zeta(t)$
θ	$\rightarrow$	ângulo de fase inicial
$\omega = 2\pi f$	$\rightarrow$	velocidade angular (radianos/s)
f	$\rightarrow$	frequência (Hz)

Se a frequência for fixa, o sinal ζ (t) fica dependendo apenas das condições iniciais, expressas pela magnitude M e pela fase θ. Daí, podermos isolar o operador girante unitário $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, resultando:

$$\zeta(t) = M \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1}$$

onde o coeficiente $M \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ corresponde ao vetor imobilizado no plano complexo com as condições iniciais de amplitude e fase, chamado **fasor**.

Sabemos que as leis de circuitos lineares envolvem algumas relações e operações entre as variáveis, tais como: soma, diferença, produto, diferenciação e integração.

Na forma complexa (1) apenas as operações de divisão e de produto conjugado entre variáveis perdem o termo girante $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, o que quer dizer que o resultado dessas operações não será um vetor girante, mas sim uma grandeza complexa, como por exemplo, a impedância (divisão) e potência (produto conjugado).

Se o sistema está em regime permanente senoidal, então a análise pode ser reduzida às condições iniciais (t = 0), e portanto:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 1$$
$$\zeta(t = 0) = M \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

ou seja, toda a análise de sinais senoidais em regime permanente se resume a operações entre variáveis complexas ou **FASORES**.

Proposição IV.1
CONCEITOS DE IMPEDÂNCIA,
REATÂNCIA CAPACITIVA E REATÂNCIA INDUTIVA

Objetivo: Verificar leis de circuitos lineares em regime permanente senoidal através de variáveis complexas.

Revisão da Teoria:

As leis de circuitos também podem ser estendidas para as variáveis complexas, resultantes da representação fasorial em regime permanente senoidal. Para os circuitos série *RL* ou *RC,* por exemplo, as relações temporais *v*-*i*, são dadas por:

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

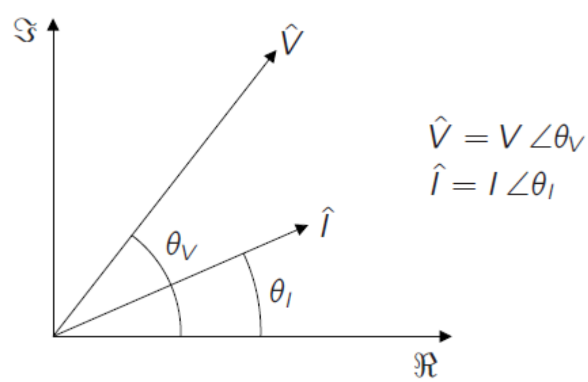
$$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + v_C(0)$$

Estas mesmas relações são expressas em termos fasoriais por:

$$\hat{V} = R\hat{I} + j\omega L\hat{I} = (R + j\omega L)\hat{I}$$

$$\hat{V} = R\hat{I} + \frac{1}{j\omega C}\hat{I} = \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\hat{I}$$

Os coeficientes $j\omega$ e $1/j\omega$ indicam que houve operação de derivada e integração, respectivamente, sobre a variável corrente. $\hat{V}$ e $\hat{I}$ são fasores definidos através da magnitude (expressa pelo valor eficaz da grandeza) e fase no plano complexo.



Como se pode ver, a relação entre os fasores de tensão e corrente é um número complexo, que designamos como **impedância** do circuito:

$$\frac{\hat{V}}{\hat{I}} = Z \quad \Rightarrow \quad \text{Lei de Ohm para fasores}$$

No caso dos circuitos série *RL* e *RC* resulta, respectivamente:

$$Z_L = R + \mathrm{j}\omega L = R + \mathrm{j}X_L$$
$$Z_C = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = R - \mathrm{j}X_C$$

onde $X_L = \omega L$ é a **reatância indutiva** e $X_C = 1/\omega C$ é a **reatância capacitiva.**

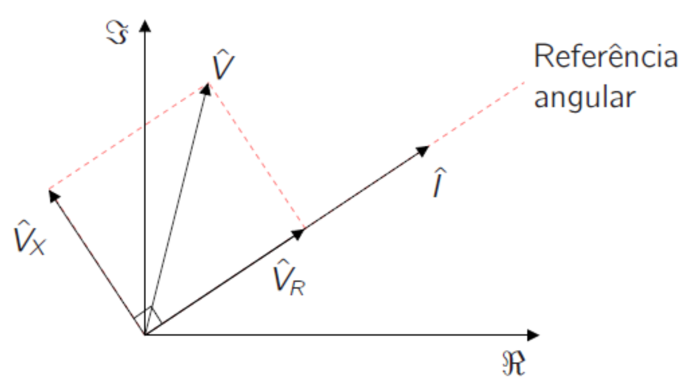
Observar que as impedâncias são apenas números complexos e não fasores, e que as leis de associação série, paralela, Y-Δ seguem as regras das operações entre números complexos. Por exemplo:

$$Z_a = R_a + \mathrm{j}X_a$$
$$Z_b = R_b - \mathrm{j}X_b$$
$$Z_a + Z_b = (R_a + R_b) + \mathrm{j}(X_a - X_b)$$

Notar também que as impedâncias (ou seus inversos: admitâncias) podem ser vistas como **operadores complexos** sobre os fasores de corrente (tensão), cujo efeito é o de modificar a magnitude e a fase do sinal. Por exemplo, no circuito *RL*:

$$\hat{V} = R\hat{I} + \mathrm{j}X_L\hat{I} = \hat{V}_R + \hat{V}_X$$

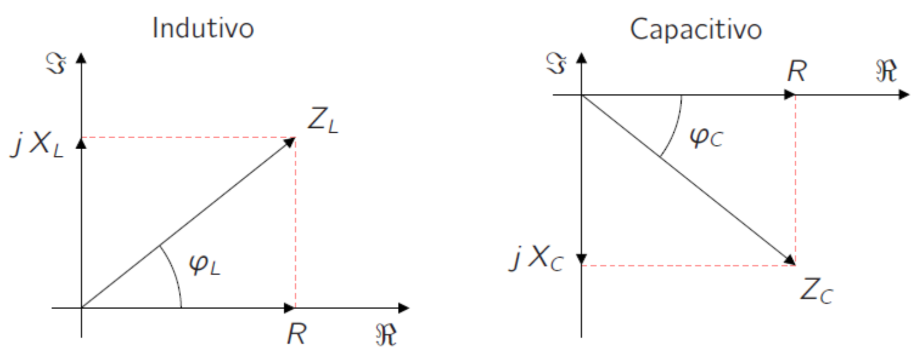
vemos que a componente $\hat{V}_R$ está em fase com $\hat{I}$, pois *R* é um número real, enquanto que $\hat{V}_X$ está em quadratura com $\hat{I}$, devido ao operador **j** que produz um avanço de fase de 90° sobre $\hat{I}$.



Em cada circuito independente pode-se escolher uma variável como **referência angular** para analisar todas as demais variáveis do circuito. Se escolhermos como referência angular o fasor corrente $\left(\hat{I} = I\angle 0^\circ\right)$, então $\hat{V}_R$ estará no eixo real e $\hat{V}_X$ no eixo imaginário.

As componentes da impedância definem o triângulo de impedâncias, ou seja:

$$Z = R \pm \mathrm{j}X = |Z|\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\varphi} = |Z|(\cos\varphi \pm \mathrm{j}\,\mathrm{sen}\varphi)$$



$\varphi_L = \mathrm{arctg}\,(X_L/R)$ $\qquad$ $\varphi_C = \mathrm{arctg}\,(-X_C/R)$

Pela lei de Ohm complexa $\left(\hat{I} = \hat{V}/Z\right)$ percebe-se que a impedância indutiva atrasa a corrente de um ângulo φ_L, enquanto que a impedância capacitiva adianta a corrente de um ângulo φ_C. Isto já foi observado no Módulo II, para o domínio do tempo.

Como não dispomos de equipamento que mostre fasores no plano complexo, (o que poderia ser feito através de sistema de aquisição de dados e microcomputador), vamos medir ou calcular as amplitudes e defasagens entre as grandezas.

Para obter amplitudes podemos utilizar voltímetros, amperímetros, ohmímetros e pontes de impedâncias ou medidores *LCR*. Para medir defasagem, costuma-se utilizar o medidor de cosφ, ou cosfímetro, onde φ é a defasagem entre a tensão e a corrente em regime permanente senoidal.
Veremos adiante que cosφ é também o **fator de potência** do circuito, sob excitação senoidal.

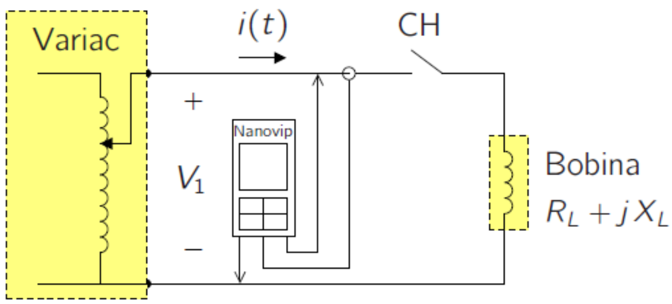
Ensaios e Questões:

(A) Verificar a regra do divisor de tensão fasorial para um circuito CA, 60 Hz

(i) ► Com o medidor LCR medir a indutância *L* e com o ohmímetro medir a resistência R_L da bobina de 1.200 espiras com núcleo em U aberto.

$R_L =$ $\quad\quad$ Ω	$L =$ $\quad\quad$ mH

(ii) ► Monte o circuito abaixo, em que a bobina é representada pela impedância $R_L + \mathrm{j}X_L$. Com a chave CH fechada, varie a tensão conforme indicado na tabela, medindo os correspondentes valores da corrente. Oriente-se pelos valores de tensão da coluna V_1, mas marque nela os valores <u>reais</u> que utilizou.

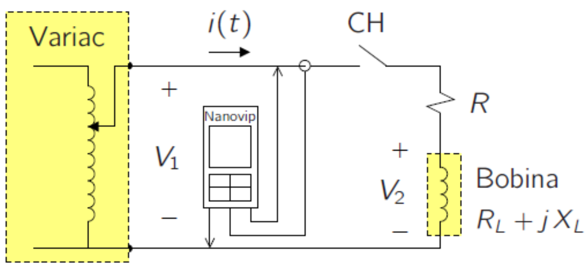


V_1 (V)	I (A)	P (W)
30		
50		
70		
90		
110		
130		
150		

(iii) Trace os gráficos $[V_1 \times I]$, $[R_L \times V_1]$ e $[L \times V_1]$ para o indutor. Comente os gráficos obtidos.

(iv) Considerando os valores da resistência e da indutância da bobina como sendo os valores médios correspondentes às medidas da tabela do item **(ii)**, compare estes valores com os valores medidos em **(i)**.

(v) ► Monte o circuito abaixo.



R = 100 Ω / 50 W

$R_L + \mathrm{j}X_L$ → bobina de 1.200 espiras com núcleo em U aberto

(vi) ► Com a chave CH fechada ajuste V_1 = 50 V e meça:

$\lvert V_2 \rvert =$ V	$\lvert I \rvert =$ mA	$\cos\varphi =$	$\cos\varphi_L =$

(vii) Calcule a impedância total do circuito $Z_T = |Z_T| \angle\varphi = R_T + \mathrm{j}X_T$ a partir das medidas feitas em **(vi)**.

(viii) Calcule a impedância da bobina $Z_L = |Z_L| \angle\varphi_L = R_L + \mathrm{j}X_L$ a partir das medidas feitas em **(vi)**. Calcule a indutância da bobina e compare com o valor medido em **(i)**.

(ix) Desenhe os triângulos de impedâncias para Z_L e Z_T no mesmo gráfico *(em papel milimetrado e em escala)*.

(x) Calcule $|V_2|$ pela regra do divisor de tensão, e compare com o valor medido no item **(vi)**.

(xi) Trace o diagrama fasorial do circuito ***(em papel milimetrado e em escala)***, com referência angular em *I*. Use **somente** as medidas $|V_1|$, $|V_2|$, $|I|$ e $\cos\varphi_L$ do item **(vi)**.

(xii) Obtenha a tensão da fonte e o fator de potência visto pela fonte a partir do diagrama fasorial. Compare com os valores medidos em **(vi)**.

(B) Constatar a ocorrência de sobretensão sustentada em circuito CA

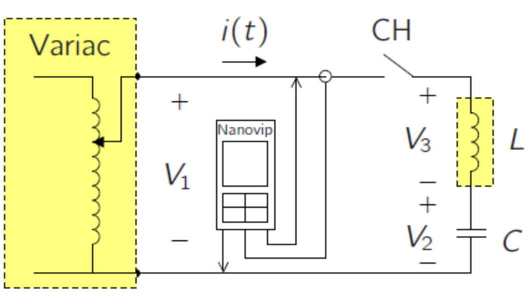
Introdução:

Em um circuito de corrente contínua a regra do divisor de tensão garante que a tensão sobre um bipolo qualquer será menor ou igual à tensão imposta pela fonte. Em circuitos CA isto nem sempre é verdade, ou seja, em circuitos CA um bipolo pode estar submetido a uma tensão **superior** àquela imposta pela fonte. Essa peculiaridade exige que se tome cuidado ao se manipular circuitos energizados, mesmo com baixas tensões de alimentação CA.

(i) Considere que a bobina de 1.200 espiras com núcleo em U aberto esteja conectada em série com um capacitor, e que o conjunto seja alimentado por uma fonte de tensão CA de 20V. Calcule o valor do capacitor na condição de ressonância, fixando f em 60Hz (frequência industrial)(*). Calcule a tensão sobre o capacitor nestas condições.

(*) Na preparação para a aula, considere $L = 300\text{mH}$ e $R_L = 5\Omega$. Na aula propriamente dita, considere os valores medidos de L e R_L.

(ii) ► Monte o circuito LC série a seguir.



$L \rightarrow$ bobina de 1.200 espiras com núcleo em U aberto

$C \rightarrow$ calculado em **(i)**

(iii) ► Ajuste V_1 = 20 V **antes** de fechar a chave**.**

(iv) ► Com a chave CH fechada, faça as seguintes medidas:

$V_1 =$ V	$V_2 =$ V	$V_3 =$ V	$I =$ A

(v) Com os valores medidos, estime o módulo da impedância interna da fonte (Variac + rede).

(vi) A partir dos valores medidos em **(iv)** e considerando Z_L conhecida, calcule Z_C e Z_T em coordenadas polares, desprezando apenas as perdas no capacitor.

(vii) Utilizando o valor de V_1 medido no item **(iv)**, obtenha V_2 em coordenadas polares pela regra do divisor de tensão.

(viii) Construa o diagrama fasorial com as tensões e correntes do circuito ***(em papel milimetrado e em escala)***, com referência angular em *I*. Use **somente** as medidas do item **(iv)**.

(ix) Qual o perigo associado a essa sobretensão sustentada sobre o capacitor?

Proposição IV.2
CONCEITOS DE POTÊNCIA COMPLEXA,
POTÊNCIA ATIVA, POTÊNCIA REATIVA, FATOR DE POTÊNCIA

Objetivo: Medir potência e fator de potência em circuito CA monofásico.

Revisão da Teoria:

A análise que se segue é válida para formas de onda senoidais. Utilizando a análise fasorial em circuitos CA monofásicos, vamos verificar como se obtém a potência elétrica. No domínio do tempo sabemos que a potência elétrica instantânea é dada pelo produto da tensão pela corrente. Considerando um circuito indutivo e referência angular na tensão, temos:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \sqrt{2}\,V\cos\omega t = \sqrt{2}\,V\,\mathrm{Re}\left\{e^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \\
i(t) &= \sqrt{2}\,I\cos(\omega t-\varphi) = \sqrt{2}\,I\,\mathrm{Re}\left\{e^{\mathrm{j}(\omega t-\varphi)}\right\} \\
p(t) &= v(t)i(t) = 2VI\cos\omega t\,\cos(\omega t-\varphi) = \\
&= \underbrace{VI\cos\varphi}_{P}\left[1+\cos 2\omega t\right] + \underbrace{VI\,\mathrm{sen}\varphi}_{Q}\,\mathrm{sen}2\omega t
\end{aligned}
$$

$$P = VI\cos\varphi \qquad\qquad Q = VI\,\mathrm{sen}\varphi$$

A **potência ativa** (P) aparece como o valor médio de $p(t)$, enquanto que a **potência reativa** (Q) corresponde, numericamente, à amplitude da oscilação em quadratura.

A potência CA envolve duas quantidades em quadratura: a potência ativa (P), que corresponde ao valor médio da potência convertida em calor ou trabalho, e a potência reativa (Q), que corresponde ao valor de pico da potência de energização dos bipolos reativos indutivos e capacitivos. Enquanto a potência ativa sempre flui da fonte para a carga, a potência reativa é trocada entre os elementos armazenadores de energia a cada meio ciclo. Essa permanente troca de energia não gera diretamente trabalho útil, mas é necessária para produzir os campos elétricos e magnéticos, através dos quais é feita a conversão de energia.

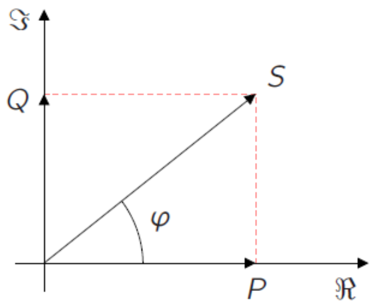
Veja que P e Q aparecem em função dos valores eficazes de $v(t)$ e $i(t)$. Em termos dos fasores correspondentes da tensão e corrente eficazes, dados por:

$$
\begin{aligned}
\hat{V} &= V\cdot e^{\mathrm{j}0} \qquad \text{(referência angular)} \\
\hat{I} &= I\cdot e^{-\mathrm{j}\varphi}
\end{aligned}
$$

Constatamos que o produto complexo conjugado é dado por:

$$S = \hat{V}\hat{I}^{*} = VI\cdot e^{\mathrm{j}\varphi} = VI\left[\cos\varphi + \mathrm{j}\,\mathrm{sen}\varphi\right] = P + \mathrm{j}Q$$

ou seja, o produto do fasor tensão eficaz pelo conjugado do fasor corrente eficaz fornece uma potência complexa *S*, cujas componentes, real e imaginária, correspondem às potência ativa e reativa do circuito. No plano complexo, essas potências definem o **triângulo de potências**:



fator de potência $= \cos\varphi = P/|S|$

Pode-se verificar que o ângulo φ do triângulo de potências é o mesmo do triângulo das impedâncias que deram origem às correntes no circuito, ou seja:

$$FP = \cos\varphi = \frac{R}{|Z|}$$

A magnitude da potência complexa $|S|$ é chamada **potência aparente**, medida em VA (ou kVA). Note que o fator de potência $FP = \cos\varphi$ é unitário (máximo) quando $P = |S|$, ou seja, $Q = 0$. Logo, **o fator de potência dá a fração da potência aparente que realmente é dissipada ou convertida em trabalho**. A potência ativa pode ser medida diretamente através de um wattímetro.

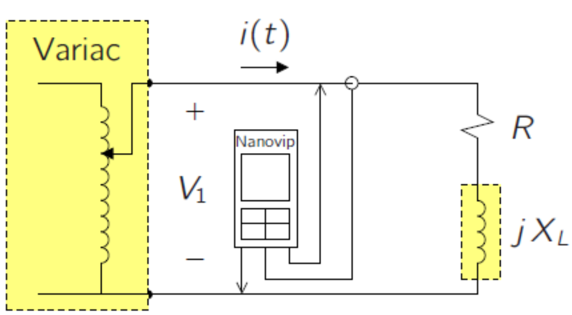
O Nanovip permite medir tanto *P* como *Q* e *S*, desde que a corrente seja maior ou igual a aproximadamente 200 mA (ou 400 mA, dependendo do modelo) e a frequência esteja na faixa $40 < f < 400\text{Hz}$.

Ensaios e Questões:

(i) ► Meça a indutância da bobina de 250 espiras com núcleo em U aberto com o medidor LCR.

$$\boxed{L = \qquad \text{mH}}$$

(ii) ► Faça a montagem a seguir, que prevê a medição de potência ativa.



R = 5 Ω / 100 W
$X_L \rightarrow$ bobina de 250 espiras com núcleo em U aberto

(iii) ► Ajuste V_1 = 20 V no Variac. Meça os seguintes valores com o Nanovip:

$I =$ A	$P =$ W	$\cos\varphi =$

(iv) Calcule a potência aparente a partir dos valores medidos em **(iii)** e desenhe o triângulo de potências ***(em papel milimetrado e em escala)***.

(v) Conhecido o valor de R e a potência ativa, determine o valor da resistência da bobina.

(vi) Usando as medidas de potência, determine a indutância da bobina e compare com o valor medido em **(i)**.

Proposição IV.3
CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

Objetivo: Verificar o efeito de corrigir o fator de potência de uma carga indutiva.

Introdução:

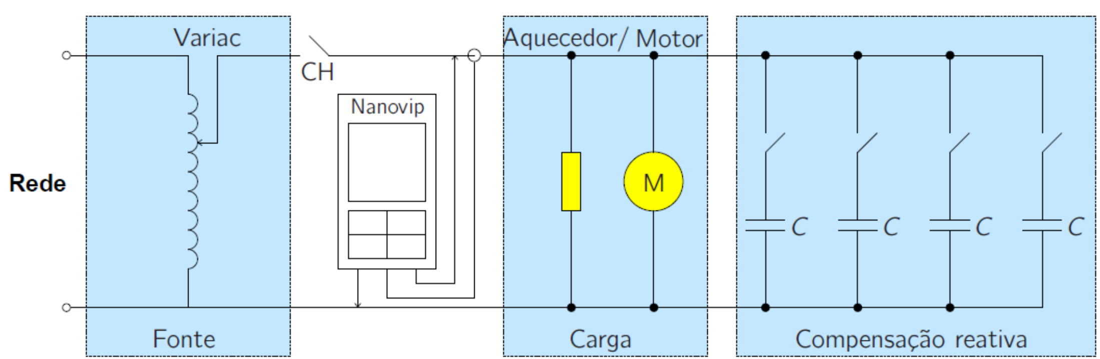
O fato da potência reativa corresponder a uma energia de troca entre capacitores e indutores permite que se reduza o trânsito dessa potência através do sistema de transmissão se compensarmos localmente as cargas indutivas com as capacitivas.

Esse processo de compensação reativa é conhecido como **correção do fator de potência (FP)** e tem um grande interesse prático nas instalações industriais, onde normalmente predominam as cargas indutivas dos motores elétricos. Veremos que o processo de correção de *FP*, além de fornecer localmente os reativos solicitados pela carga, reduz a corrente da fonte, aliviando o sistema de transmissão como um todo.

Ensaios e Questões:

Considere como carga indutiva um motor de indução monofásico 110 V, ½ HP, alimentado através do Variac.

(i) ► Monte o circuito a seguir. Os capacitores serão conectados um por vez para a compensação do *FP*.



(ii) ► Com a chave CH1 fechada e as demais abertas, aumente progressivamente a tensão nos terminais do Variac até **100 V**, com o motor atingindo a velocidade nominal.

(iii) ► Preencha a tabela a seguir, ***mantendo a tensão da fonte constante (100 V)***. Note que P_T e Q_T são as potências ativa e reativa ***fornecidas pela fonte***.

C [μF]	I [A]	P_T [W]	Q_T [VAr] (*)	S [VA]	FP (*)	Cap/Ind (**)
–						
10						
15						
20						
25						
30						
35						
40						
45						
50						

(*) Valores negativos de Q_T e FP no Nanovip indicam circuitos capacitivos. Porém, sabe-se que FP somente assume valores positivos.
(**) Capacitivo/Indutivo.

(iv) Trace as curvas $[I \times C]$ e $[FP \times C]$ **no mesmo gráfico**. Comente.

(v) Trace as curvas $[P_T \times C]$ e $[Q_T \times C]$ **no mesmo gráfico**. Comente.

(vi) Quais são as potências ativa e reativa que a carga absorve?

(vii) Por que numa ligação RLC paralela a corrente absorvida da fonte é mínima para *fator de potência unitário*?

Obs.: Normalmente, um motor de indução não opera em vazio como nesse ensaio, e por isso o *FP* é maior devido à carga mecânica aplicada. Assim mesmo, é comum que o *FP* em instalações industriais esteja abaixo do limite mínimo permitido pela legislação (*FP* = 0,92) para isenção de multa sobre o consumo de reativos.

Conclusão: Duas boas razões para a correção do fator de potência são **(a)** redução da corrente na linha de alimentação das cargas (e consequente redução da bitola dos condutores), e **(b)** isenção da multa por FP < 0,92.