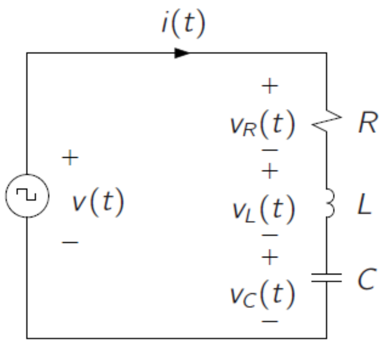
Proposição III.3
CIRCUITO RLC SÉRIE,
FREQUÊNCIA NATURAL DE OSCILAÇÃO, AMORTECIMENTO

Objetivo: Verificar a frequência natural e o amortecimento das oscilações.

Revisão da Teoria:

CIRCUITO *RLC* SÉRIE



Neste circuito:

$$v = v_R + v_L + v_C \qquad\qquad v_R = R\cdot i$$

$$v_L = L\cdot\frac{di}{dt} \qquad\qquad i = C\cdot\frac{dv_C}{dt}$$

Portanto: $$v = R\cdot i + L\cdot\frac{di}{dt} + v_C$$

Obtém-se o comportamento transitório do circuito fazendo *v*=0. Neste caso, a equação diferencial pode ser expressa por:

$$0 = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i \tag{1}$$

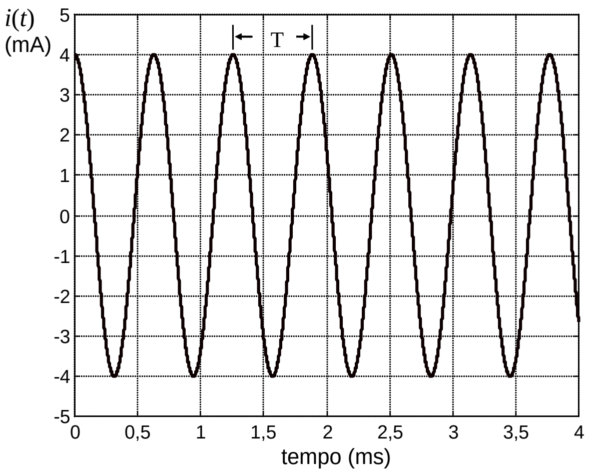
cuja forma geral (ou canônica) é dada por:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha\,\frac{di}{dt} + \omega_0^2\, i = 0$$

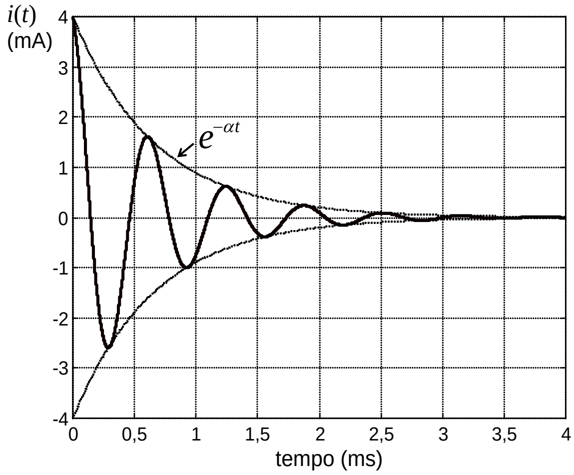
onde: $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ é o amortecimento do sinal $i(t)$, medido em s^{-1},

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ é a frequência natural sem amortecimento, medida em rad/s,

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ é o período da oscilação, medido em s.



Sem amortecimento



Com amortecimento

A influência dos parâmetros dos bipolos sobre o amortecimento e a frequência de oscilação pode ser analisada mais facilmente considerando que $i(t)$ é do tipo exponencial: $i(t) \sim k \cdot e^{\lambda t}$. Com essa hipótese podemos reduzir (1) à seguinte equação característica:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{2}$$

cujas raízes são os pólos, ou autovalores, dados por:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Estas raízes podem ser reais, imaginárias ou complexas, dependendo dos valores de α e ω_0, resultando um dos seguintes casos:

(a) $\alpha < \omega_0 \rightarrow$ caso subamortecido (raízes imaginárias);
(b) $\alpha = \omega_0 \rightarrow$ caso limite ou crítico (raízes iguais);
(c) $\alpha > \omega_0 \rightarrow$ caso superamortecido (raízes reais).

A solução da equação homogênea, neste caso, assume a forma:

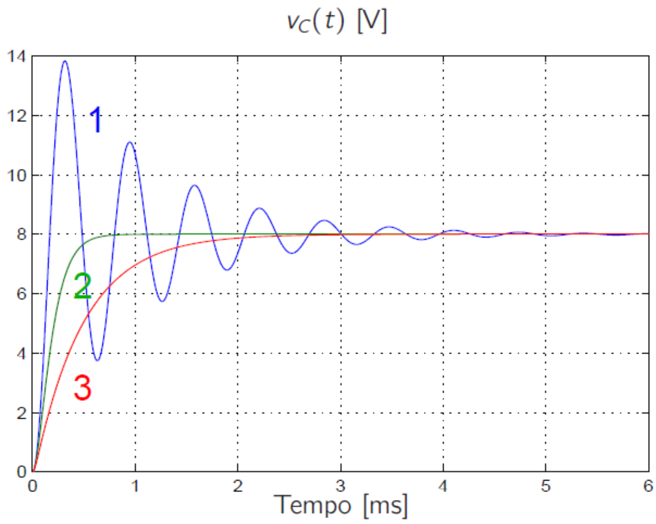
$$i(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3}$$

Para determinar as constantes k_1 e k_2 é necessário considerar o estado inicial do circuito. Se, por exemplo, a corrente inicial no circuito for nula ($v_R(0) = 0$), resulta:

$$i(0) = k_1 + k_2 = 0$$

A derivada inicial da corrente pode ser obtida a partir da tensão inicial no capacitor:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{L}\left[v - v_C(0)\right] = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$$



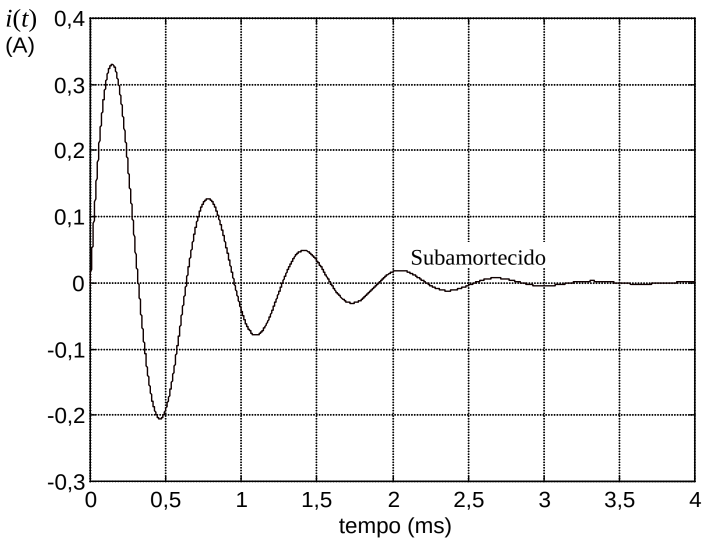
Resposta ao degrau: 1 - subamortecido 2 - crítico 3 - superamortecido

(a) Caso Subamortecido: $\alpha < \omega_0$ $(R < R_{cr})$

Neste caso, a equação (2) terá duas soluções complexas conjugadas:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

onde o radicando corresponde à frequência natural amortecida (ω_d). Substituindo λ_1 e λ_2 na equação geral (3) resulta como solução:



$$i(t) = \frac{1}{\omega_d L}\left[v - v_C(0)\right] e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

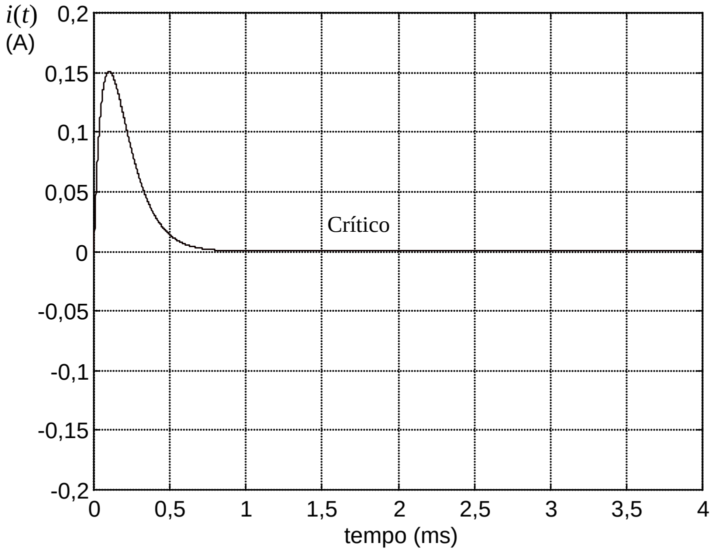
Neste caso, a resposta é nitidamente oscilatória com frequência $\omega_d < \omega_0$ e com amplitude decrescente para $\alpha > 0$.

(b) Caso Crítico: $\alpha = \omega_0 \left(R = R_{cr}\right)$

Nesse caso a equação (2) terá duas soluções idênticas:

$$i_1 = i_2 = -\alpha = -\frac{R_{cr}}{2L}$$

e a resposta temporal será dada pelo limite de (3) para $\lambda_1 \to -\alpha$ e $\lambda_2 \to -\alpha$, ou seja:

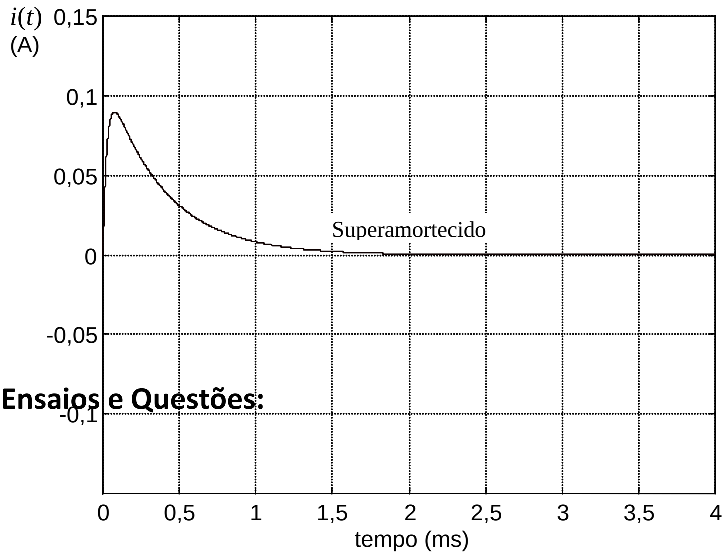


$$i(t) = -\frac{1}{L}\left[v_C(0) - v\right] t \, e^{-\alpha t} \qquad (4)$$

Neste caso limite não ocorre oscilação.

(c) Caso Superamortecido: $\alpha > \omega_0 \; \left(R > R_{cr}\right)$

Neste caso tem-se $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} > 0$, resultando duas raízes reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$ em (2). Assim, a resposta para este caso superamortecido será:



$$i(t) = \frac{1}{L}\left[v - v_C(0)\right] \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

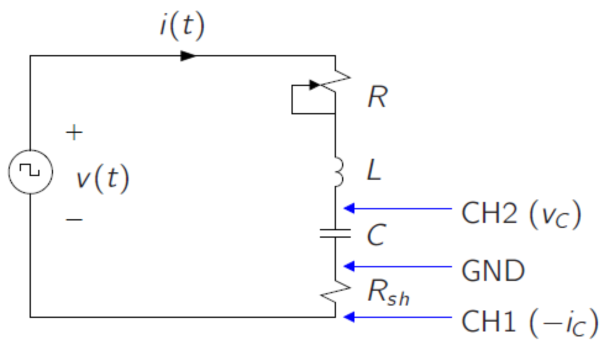
Ensaios e Questões:

Os ensaios serão realizados apenas com a associação RLC série. Se alimentarmos este circuito com uma onda quadrada, de período suficientemente longo, podemos observar a resposta para cada degrau da tensão imposta. Para verificar, será utilizada a montagem do circuito abaixo.

(i) ► Observe que um indutor sempre possui um longo condutor elétrico, apresentando assim uma resistência interna não desprezível. Para levar em conta esta resistência, devemos modelar um indutor real como uma associação em série de indutor ideal e uma resistência. Para ***L* = 100 mH** meça com o ohmímetro a resistência R_L da bobina:

R_L = Ω

(ii) ► Realize a montagem a seguir com ***L* = 100 mH**, ***C* = 1 μF**, e $\boldsymbol{R_{sh}}$ **= 10 Ω**.



(iii) Calcule a frequência natural f_0, em Hz.

(iv) Obtenha o valor crítico de R para $\alpha = \omega_0$.

(v) ► Ajuste o gerador para onda quadrada, com $\boldsymbol{V_{pp}}$ **= 8 V** e ***f* = 100 Hz** em vazio.

(vi) ► Ajuste e anote o valor de R de forma a obter cada uma das três condições de amortecimento descritas anteriormente. **Salve** as respectivas formas de onda da corrente e da tensão no capacitor.

Proposição III.4
RESSONÂNCIA SÉRIE

Objetivo: Verificar o fenômeno da ressonância de um circuito RLC série.

Introdução:

Já vimos anteriormente que os circuitos indutivo e capacitivo introduzem defasagens contrárias entre tensão e corrente. Vimos também que a defasagem depende da frequência da tensão de alimentação. Observaremos agora como se comporta um circuito *RLC* série quando sua entrada possui a frequência natural do circuito.

Ensaios e Questões:

(i) Qual a impedância vista pela fonte quando a entrada possui frequência f_0? Observe que $1/j = j/j^2 = -j$.

(ii) Quanto valem a tensão no indutor e no capacitor para essa frequência? Quanto vale a soma destas tensões? Dê uma explicação física ao fenômeno.

(iii) ► Faça um experimento que verifique este resultado e salve as formas de onda relevantes.

(iv) ► Varie R e observe o que ocorre com as tensões v_L e v_C. Explique porque isso ocorre.

Proposição III.5
RESSONÂNCIA SÉRIE, FAIXA DE PASSAGEM, LARGURA DE BANDA, FATOR DE QUALIDADE

Objetivo: Verificar o fenômeno da ressonância, sintonia, faixa de passagem e fator de qualidade de um circuito RLC série.

Introdução:

Já vimos anteriormente que os circuitos indutivo e capacitivo introduzem defasagens contrárias entre tensão e corrente. Vimos também que a defasagem depende da frequência da tensão de alimentação. Veremos agora que a frequência não determina apenas a defasagem, mas afeta também as magnitudes dos sinais de tensão ou corrente resultantes. Para observar esses efeitos vamos considerar a frequência uma variável independente no circuito *RLC* série abaixo.

Observe que se trata do mesmo circuito analisado nas Proposições III.1 e III.3, porém agora a análise do comportamento será no domínio da frequência. Ou seja, faremos a análise para diferentes valores de frequência.

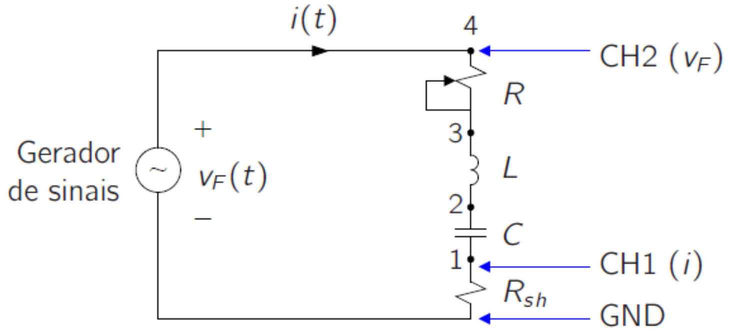
Ensaios e Questões:

(i) Determine analiticamente e experimentalmente a magnitude da corrente do circuito abaixo para uma entrada senoidal de frequência 1 kHz com R = 300 Ω. Qual o valor da corrente para frequências muito altas e muito baixas? Explique.

(ii) Para a bobina de **1 H**, meça:

R_L = Ω	(ohmímetro)

(iii) ► Monte o circuito abaixo, conectando o osciloscópio de forma a observar os sinais de corrente e tensão da fonte respectivamente.



R = década

L = 100 mH

C = 0,1 μF

R_{sh} = 10 Ω

(iv) ► Preencha as tabelas a seguir para ***R* = 300 Ω** e ***R* = 100 Ω**. Preencha ambas as tabelas simultaneamente, pois é simples alterar o valor de R. Mantenha a amplitude da tensão na saída da fonte (a que está sendo medida no canal 2) constante durante o ensaio. Desta forma, não é necessário incluir a resistência interna da fonte (50Ω) na análise, já que a tensão TERMINAL da fonte foi mantida constante, compensando a queda de tensão no resistor interno. Em resumo, este procedimento faz com que o gerador de sinais se comporte como se fosse uma fonte ideal, cuja tensão não varia com a carga nem com a frequência.

	f [kHz]	*R* = 300 Ω	*R* = 100 Ω	*f* [kHz]	*R* = 300 Ω	*R* = 100 Ω
		I [mA] (*)	*I* [mA] (*)		*I* [mA] (*)	*I* [mA] (*)
	1,00			1,60		
	1,20			1,65		
	1,30			1,70		
	1,40			1,80		
	1,45			2,00		
	1,50			2,20		
$f_{I_{max}}$ (**) →				2,40		

(*) Valores RMS

(**) Frequência para a qual a corrente é máxima

(v) Explique por que, se nenhuma variação de amplitude for feita, a tensão fornecida pela fonte muda tanto quando a frequência muda.

(vi) Compare a frequência ($f_{I_{max}}$) que provoca a máxima corrente (I_{max}), com a frequência natural $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ obtida na Proposição III.2, na parte 1 do Módulo III. O que você conclui?

(vii) Calcule analiticamente I_{max} em função dos parâmetros do circuito e da tensão aplicada para os dois valores de *R*. Compare com os valores medidos.

(viii) ► Verifique a relação entre as fases da corrente e tensão nas frequências $f_{I_{max}}$, bem como em frequências abaixo e acima desta. **Salve** e junte ao relatório as formas de onda referentes às situações acima. **Explique** o comportamento observado, relacionando os resultados com a impedância do circuito em cada uma das situações.

(ix) ► Use agora uma onda quadrada como entrada do circuito, com frequência f_0. Observe também os componentes **Salve** e junte ao relatório as formas de onda obtidas. **Explique** o comportamento observado, relacionando os resultados com a impedância do circuito em cada uma das situações

(x) Trace em um mesmo gráfico as curvas $[I \times f]$ para ***R* = 300 Ω** e ***R* = 100 Ω**. Junte as figuras ao relatório a ser entregue via Moodle.

Note através das curvas $[I \times f]$ traçadas em **(vii)** que o valor de *R* não afeta a frequência de ressonância, porém modifica a "altura" e a "largura" da curva $[I \times f]$, ou seja, modifica a "sintonia" do circuito. Essa sintonia pode ser quantificada em função da faixa de passagem de frequência.

A faixa de passagem é definida em função das frequências (f_A e f_B) para as quais a potência cai para a metade do valor absorvido na ressonância. Essa definição é conveniente, uma vez que a potência absorvida na ressonância é máxima e vale:

$$P_{\max} = \frac{V^2}{R_T} = R_T \cdot I_{\max}^2$$

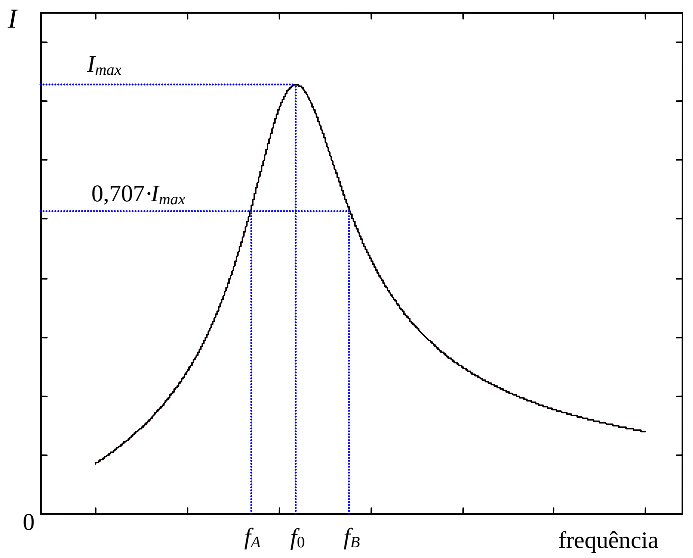
em que I e V são valores eficazes, e R_T é a resistência total do circuito. Portanto, a condição de meia potência ocorre para:

$$\frac{P_{\max}}{2} = R_T \left(\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \right)^2$$

As frequências nas quais ocorre essa condição são chamadas **frequências de corte**. Define-se, então, a **largura de faixa** (B) como sendo a diferença entre as frequências de corte.

(xi) ► Determine experimentalmente os dois valores de frequência de corte $\{f_A, f_B\}$. Lembre-se de manter a tensão na entrada do circuito constante.

	f_A [Hz]	f_B [Hz]
***R* = 300 Ω**		
***R* = 100 Ω**		



(xii) O circuito RLC é usualmente conhecido como um circuito de sintonia (usado em receptores de rádio e televisão). Explique no relatório do Moodle, a partir dos gráficos, qual dos dois casos (300 Ω ou 100 Ω) representaria um circuito mais seletivo do ponto de vista de recepção do sinal, e por quê.